Editora Bernoulli

MATEMÁTICA

Volume 04

Sumário - Matemática

MATEMÁTICA

MÓDULO 07 FRENTE A

Princípio fundamental da contagem e arranjos

INTRODUÇÃO

A análise combinatória é a parte da Matemática que se preocupa em contar as possibilidades. Alguns problemas bem simples podem ser resolvidos enumerando-se todas as possibilidades. Por exemplo:

Quantos são os números ímpares entre 10 e 20?

Em outras situações, entretanto, a enumeração torna-se muito trabalhosa. Nesses casos, é necessária a utilização de algumas técnicas de contagem. Por exemplo:

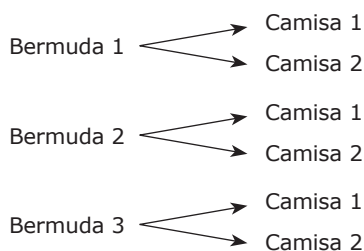
Quantas são as placas de carros que podem ser formadas com 3 letras e 4 algarismos?

O princípio fundamental da contagem nos dá a resposta.

COMO CONTAR, SEM CONTAR?

Se dispomos de 3 bermudas e 2 camisas, todas distintas, de quantas formas podemos vesti-las para ir a um churrasco?

Vamos, inicialmente, escolher a bermuda. Há 3 possibilidades. Para cada uma delas, independentemente de qual escolhemos, teremos sempre 2 opções de camisa.

Vejamos:

O número de maneiras de vestir-se é, portanto, 3 x 2 = 6.

Nesse exemplo, aplicamos, de maneira intuitiva, o princípio fundamental da contagem (P.F.C.), que podemos enunciar assim:

> Se um determinado evento pode ocorrer de **x** maneiras, e um outro evento pode ocorrer de **y** maneiras (independentemente do resultado do primeiro evento), então os dois juntos podem ocorrer de x.y maneiras.

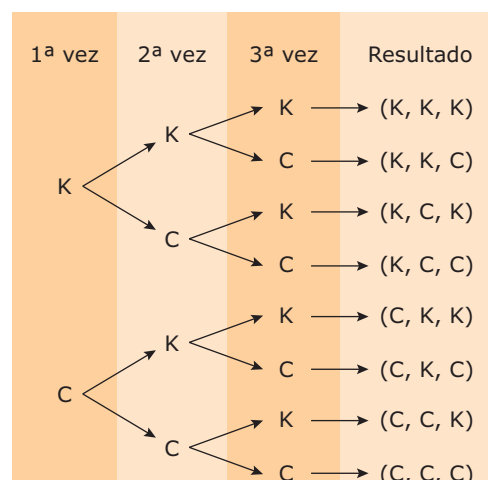
OBSERVAÇÃO

Esse princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais eventos independentes.

Exemplos

1º) Quantos são os resultados possíveis para o lançamento de uma moeda três vezes?

Resolução:

Para cada vez que lançarmos a moeda, temos duas possibilidades: cara (**K**) ou coroa (**C**)

Pela árvore anterior, verificamos que são 8 resultados possíveis. Pelo P.F.C., temos:

$$\underbrace{2}_{1^a \text{ vez}} \cdot \underbrace{2}_{2^a \text{ vez}} \cdot \underbrace{2}_{3^a \text{ vez}} = 8$$

2º) Quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos do sistema decimal?

Resolução:

Temos três posições para preencher. Como não podemos começar com zero e os algarismos devem ser distintos, pelo P.F.C., temos:

$$\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 648$$

(possibilidades)

3º) De quantas maneiras dois casais podem se sentar em dois degraus de uma escada para tirar uma fotografia, se em cada degrau deve ficar um casal?

Resolução:

Temos quatro posições a serem preenchidas na escada.

$$\underline{1^a}\ \ \underline{2^a}$$
$$\underline{3^a}\ \ \underline{4^a}$$

Na 1ª posição, podemos colocar qualquer pessoa (4 possibilidades). Depois de preenchida a 1ª posição, para o 2º lugar, temos sempre uma única possibilidade (pois o casal é definido).

Para a 3ª posição, temos duas possibilidades e, para a 4ª posição, temos uma possibilidade.

Assim, pelo P.F.C., temos, então, 4.1.2.1 = 8 formas diferentes de os dois casais se sentarem na escada.

$$\underline{4}\ \ \underline{1}$$
$$\underline{2}\ \ \underline{1}$$

4º) Quantos são os números pares com três algarismos distintos que podemos formar com algarismos do sistema decimal?

Resolução:

Temos de preencher 3 posições: $\underline{1^a}$ $\underline{2^a}$ $\underline{3^a}$.

Se escolhermos os algarismos 2 e 3, por exemplo, para as duas primeiras posições, teremos 4 possibilidades para o 3º algarismo, que deve ser par (0, 4, 6, 8).

Porém, se escolhermos inicialmente os algarismos 2 e 6, teremos 3 possibilidades para o 3º algarismo (0, 4, 8).

Isso, como vemos, cria um problema que pode ser resolvido iniciando o preenchimento das posições pela casa que possui a maior restrição. Assim, devemos separar o problema em dois casos:

1º caso: Pares terminados em zero.

Logo, pelo P.F.C., teremos:

$$\underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{1} = 72$$

↓ Todos, menos {0} ↓ Todos, menos os dois já utilizados

2º caso: Pares não terminados em zero.

$$__\ __\ \frac{\{2, 4, 6, 8\}}{4}$$

↓ possibilidades

Logo, pelo P.F.C., teremos:

$$\underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{4} = 256$$

↓ Todos, menos o zero e o número par utilizado ↓ Todos, menos os dois números já utilizados

Somando-se as quantidades de pares, teremos o total:

Total = 72 + 256 = 328

NOTAÇÃO FATORIAL

No estudo de problemas de análise combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos. Para facilitar a representação desses produtos, foi criada a notação fatorial.

Assim, define-se:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \ldots 3.2.1$$
$$0! = 1$$

Exemplos

1º) Simplificação de frações.

A) $\dfrac{6!}{5!.3!} = \dfrac{6.5!}{5!.3.2} = \dfrac{6}{6} = 1$

B) $\dfrac{4!.9!}{10!.7!} = \dfrac{4!.9!}{10.9!.7.6.5.4!} = \dfrac{1}{2\,100}$

C) $\dfrac{10.(n+10)!}{10!.(n+10)} = \dfrac{10.(n+10).(n+9)!}{10.9!.(n+10)} = \dfrac{(n+9)!}{9!}$

2º) Calcular o valor de **n**.

$$\frac{(n+10)!}{(n+8)!} = 110$$

Resolução:

$$\frac{(n+10).(n+9).(n+8)!}{(n+8)!} = 110 \Rightarrow n^2 + 19n + 90 = 110$$

$n^2 + 19n - 20 = 0 \Rightarrow n = -20$ ou $n = 1$

$n = -20$ (matematicamente inconsistente)

Portanto, $n = 1$.

ARRANJOS SIMPLES

Considere o seguinte problema:

Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Observe que, em um número de três algarismos distintos, a ordem ocupada por um determinado algarismo é importante, pois, ao trocarmos esse algarismo de posição, o número como um todo se altera. Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

Centena	Dezena	Unidade
↓	↓	↓
6 .	5 .	4

= 120 números

Observe que $6.5.4 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{6!}{3!}$.

É interessante verificar que há 6 elementos à disposição, e que cada grupo formado terá 3 elementos cada. Dizemos que cada grupo formado é um arranjo simples de 6 elementos, tomados 3 a 3.

De maneira geral, seja um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com **n** elementos distintos. Queremos formar grupos com **p** elementos cada (n > p), de modo que a ordem dos elementos em cada grupo seja importante.

Assim, temos:

Observe que há **p** posições a serem preenchidas. Temos que

- a primeira posição pode ser preenchida de **n** modos.
- a segunda posição pode ser preenchida de n – 1 modos.
- a terceira posição pode ser preenchida de n – 2 modos.

⋮

- a p-ésima posição pode ser preenchida de n – (p – 1) modos.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos que o total de grupos formados é igual a:

$$n.(n - 1).(n - 2). \dots .[n - (p - 1)] =$$

$$n.(n - 1).(n - 2). \dots .[n - p + 1] =$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2). \dots .(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Esse resultado corresponde ao número de arranjos simples de **n** elementos, tomados **p** a **p**, que indicamos por $A_{n,\,p}$.

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo

Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto

A = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}?

Temos $A_{7,\,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7.6.5.4 = 840$ números.

OBSERVAÇÃO

As permutações simples de **n** elementos de um conjunto podem ser consideradas arranjos simples, nos quais n = p.

Assim, temos:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

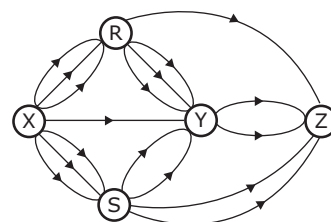
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número **MÁXIMO** de tentativas para acertar a senha é

A) 1 680
B) 1 344
C) 720
D) 224
E) 136

02. (UFMG) Numa cidade **A**, os números de telefones têm sete algarismos, sendo que os três primeiros constituem o prefixo da cidade. Os telefones que terminam em 10 são reservados para as farmácias e os que têm os dois últimos algarismos iguais, para os médicos e hospitais. A quantidade dos demais números de telefones disponíveis na cidade **A** é

A) 1 650
B) 2 100
C) 4 800
D) 8 900
E) 9 000

03. (UFMG) Observe o diagrama.

O número de ligações distintas entre **X** e **Z** é

A) 41
B) 45
C) 35
D) 39

MATEMÁTICA

04. (UFMG) O número de múltiplos de 10, compreendidos entre 100 e 9 999 e com todos os algarismos distintos, é

A) 250 B) 321 C) 504 D) 576

05. (UECE–2007) Utilizando apenas os algarismos 2 e 3, a quantidade de números inteiros positivos e menores que 1 000 000 (incluindo-se aqueles com algarismos repetidos) que podem ser escritos no sistema decimal é

A) 125 B) 126 C) 127 D) 128

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFJF-MG) Temos sete cores distintas e queremos pintar um painel com quatro listras, cada listra de uma cor diferente. O número de maneiras com que isso pode ser feito é

A) 35
B) 840
C) 2 401
D) 16 384

02. (VUNESP) **DETERMINE** quantos são os números de três algarismos, múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas pertencem a {1, 2, 3, 4}, e os demais algarismos, a {0, 5, 6, 7, 8, 9}.

03. (Cesgranrio) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

A) 69
B) 2 024
C) 9 562
D) 12 144
E) 13 824

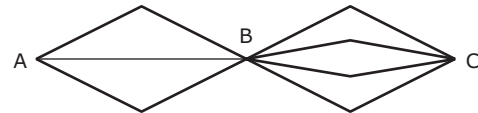
04. (UFRJ) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

A) Se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar.
B) Se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro.
C) A soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo Dr. Z?

05. (UFRGS) O número de múltiplos de três, com quatro algarismos distintos, escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9, é

A) 24 B) 36 C) 48 D) 72 E) 96

06. (UFU-MG) Considere uma teia de aranha com 7 fios, sendo 3 deles ligando **A** até **B** e 4 ligando **B** até **C**, conforme a figura a seguir. Uma aranha posicionada em **A** deseja realizar um passeio pela teia saindo de **A**, caminhando até **B**, posteriormente até **C**, regressando a **B** e, finalmente, retornando a **A**. De quantas maneiras diferentes esse passeio poderá ser realizado sem que a aranha passe duas vezes pelo mesmo fio da teia?

A) 24 B) 36 C) 18 D) 72

07. (Mackenzie-SP) Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados **POSSÍVEIS** para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de

A) 426 B) 444 C) 468 D) 480 E) 504

08. (UNITAU-SP) Na área de Ciências Humanas, existem treze opções no Vestibular da UNITAU. Um candidato tem certeza quanto à 1ª opção, mas, quanto à segunda, está em dúvida, por isso resolve escolher aleatoriamente qualquer uma nessa área. De quantas maneiras ele poderá preencher sua ficha de inscrição, sendo a 2ª necessariamente diferente da 1ª?

A) 156
B) 144
C) 13
D) 169
E) 12

09. (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pintura seriam:

Primeira:

verde amarelo bege verde cinza

Segunda:

verde cinza verde bege cinza

DETERMINE o número de possibilidades diferentes de pintura.

10. (UNIRIO-RJ) Com os algarismos de 1 a 9, o total de números de 4 algarismos diferentes, formados por 2 algarismos pares e 2 ímpares, é igual a

A) 126
B) 504
C) 720
D) 1 440
E) 5 760

11. (UFCE) Considere os números inteiros maiores que 64 000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contêm os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é

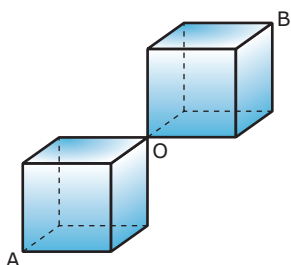
A) 2 160
B) 1 320
C) 1 440
D) 2 280
E) 2 400

12. (UFRRJ) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, no qual as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1ª letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número **MÁXIMO** de carros que cada estado poderá emplacar será de

A) 175 760
B) 409 500
C) 6 500 000
D) 6 760 000
E) 175 760 000

13. (FUVEST-SP) Os números de 3 algarismos, todos distintos, que existem no nosso sistema de numeração são

A) 650
B) 648
C) 649
D) 640
E) N.d.a

14. (UFSCar-SP) Considere a figura a seguir. O número de caminhos mais curtos, ao longo das arestas dos cubos, ligando os pontos **A** e **B** é

A) 2 B) 4 C) 12 D) 18 E) 36

15. (PUC-Campinas-SP) Com os elementos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} são formados números de três algarismos distintos. A quantidade de números formados cuja soma dos algarismos é um número par é

A) 30
B) 36
C) 52
D) 60
E) 72

16. (PUC-SP) Uma jarra cilíndrica deve ser pintada com três faixas de cores diferentes, usando-se as tintas disponíveis verde, vermelha, amarela, azul e preta. O número de jarras que se pode pintar, com padronagens diferentes, é

A) 120
B) 100
C) 90
D) 70
E) 60

17. (UFU-MG–2006) Para gerar a sua senha de acesso, o usuário de uma biblioteca deve selecionar cinco algarismos de 0 a 9, permitindo-se repetições e importando a ordem em que eles foram escolhidos. Por questões de segurança, senhas que não tenham nenhum algarismo repetido são consideradas inválidas. Por exemplo, as senhas 09391 e 90391 são válidas e diferentes, enquanto a senha 90381 é inválida. O número total de senhas válidas que podem ser geradas é igual a

A) 69 760
B) 30 240
C) 50 000
D) 19 760

18. (PUC Rio) A partir de outubro, os telefones do Rio de Janeiro irão gradualmente adotar oito algarismos, em vez de sete, por causa da necessidade de oferta de novas linhas. O algarismo a ser acrescentado será o primeiro e será necessariamente 3 ou 8. Supondo-se que, no sistema em vigor, qualquer combinação de sete algarismos é um número de linha possível, o número de possíveis novas linhas é

A) 7^{10}
B) 10^7
C) 2×10^7
D) 3×10^7
E) 10^8

19. (UFTM-MG) Um cartógrafo, para fazer o mapa do Sudeste brasileiro mostrado na figura, deverá colorir cada estado com uma cor, tendo disponíveis 4 cores e podendo repeti-las no mapa. Estados que fazem divisa entre si devem ter cores distintas. Sabendo que somente SP e ES não fazem divisa entre si, o número de formas distintas de colorir o mapa é

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

02. (Enem–2002) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito anteriormente. Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

A) 14 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

03. (Enem–2007) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir:

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C AMAZÔNIA, ano 1, nº 3, dez. 2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo cetáceos, outra do grupo primatas e a terceira do grupo roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

A) 1 320
B) 2 090
C) 5 845
D) 6 600
E) 7 245

GABARITO

Fixação

01. B 02. D 03. A 04. D 05. B

Propostos

01. B
02. 48
03. D
04. 1 800
05. D
06. D
07. B
08. E
09. 324
10. D
11. A
12. D
13. B
14. E
15. D
16. E
17. A
18. C
19. D

Seção Enem

01. B 02. D 03. A

MATEMÁTICA

MÓDULO 08 FRENTE A

Permutações

INTRODUÇÃO

Considere o seguinte problema:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 3 e 7?

Observe que o total de dígitos à disposição é igual à quantidade de elementos (algarismos) de cada número formado. Os números formados são 137, 173, 317, 371, 713 e 731. Tais números diferem entre si somente pela **ordem** na qual os elementos estão dispostos.

Esses agrupamentos são chamados **permutações simples** dos dígitos 1, 3 e 7.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com **n** elementos distintos. Vamos considerar o problema de formar grupos com **n** elementos distintos, de modo que a ordem dos elementos dentro de cada um desses grupos seja importante.

Observe que há **n** posições a serem preenchidas. Assim, temos:

A primeira posição pode ser preenchida de **n** modos.

A segunda posição pode ser preenchida de n – 1 modos.

A terceira posição pode ser preenchida de n – 2 modos.

⋮

A n-ésima posição pode ser preenchida de 1 modo.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos que o número de grupos é igual a:

$n.(n - 1).(n - 2).(n - 3). ... .1$, ou seja, $n!$

Esses grupos formados são chamados **permutações simples** dos **n** elementos, e são indicados por P_n.

$$P_n = n!$$

Exemplo

Determinar o número de anagramas obtidos a partir das letras da palavra DOCE.

Cada anagrama é obtido mediante a troca da posição das letras fornecidas. Portanto, trata-se de um problema de permutações simples. Assim, temos:

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ anagramas

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Considere o seguinte problema:

Quantos são os anagramas da palavra AMANHECE?

Devemos, inicialmente, distribuir as 8 letras em 8 posições.

i) A distribuição das letras **A** e **A** pode ser feita de $\frac{A_{8,2}}{2!}$ modos. Observe que dividimos o resultado por 2!, porque as permutações das letras **A** e **A** são idênticas.

ii) Após definirmos as posições das letras **A** e **A**, restam 6 posições. A distribuição das letras **E** e **E** pode ser feita de $\frac{A_{6,2}}{2!}$ modos.

iii) Após distribuirmos as letras **A**, **A**, **E** e **E**, restam 4 posições. As letras restantes podem ser distribuídas de 4! modos.

O número de anagramas é dado por:

$$\frac{A_{8,2}}{2!}.\frac{A_{6,2}}{2!}.4! = \frac{8!}{6!.2!}.\frac{6!}{4!.2!}.4! = \frac{8!}{2!.2!}$$

Generalizando, temos:

$$P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \theta} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\ldots.\theta!}$$

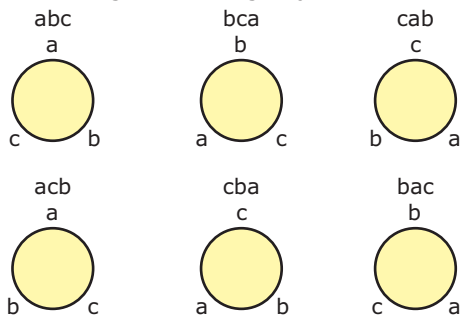
Em que **α**, **β**, ..., **θ** indicam o número de repetições de cada elemento do conjunto.

No exemplo, temos $P_8^{2,2} = \frac{8!}{2!.2!} = 10\ 080$ anagramas.

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Chamamos de permutações circulares as permutações de elementos dispostos em torno de um círculo. Duas distribuições são consideradas idênticas quando uma delas pode ser obtida a partir da outra, mediante uma rotação simples. Observe o problema a seguir:

De quantos modos podemos distribuir três objetos **a**, **b** e **c** em torno de um círculo?

Considere as seguintes configurações:

A princípio, podemos pensar que temos $P_3 = 3! = 6$ modos de distribuir **a**, **b** e **c**. No entanto, em cada uma das linhas do esquema anterior há três configurações idênticas. Cada uma das figuras de uma linha pode ser obtida a partir das demais figuras da mesma linha com uma rotação simples. Porém, cada configuração em uma linha não pode ser obtida a partir de uma rotação simples de uma configuração da outra linha.

Desse modo, temos apenas $\frac{P_3}{3} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$ permutações circulares. Observe que dividimos o total de permutações por 3, pois cada uma das permutações consideradas gera 3 configurações idênticas, que devem contar como uma.

De maneira geral, podemos considerar que, ao permutar circularmente **n** objetos distintos, cada uma das n! permutações gera **n** configurações idênticas, que devem ser "descontadas" do total. Fazemos isso dividindo n! por **n**.

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.2.1}{n} \Rightarrow$$

$$PC_n = (n - 1).(n - 2). \ldots . 2.1 \Rightarrow$$

$$PC_n = (n - 1)!$$

Em que PC_n é o número de permutações circulares de **n** objetos distintos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFSM-RS) Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta de 6 algarismos distintos e outra composta de 3 letras, escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos, e que as letras são todas vogais distintas, sendo **E** a primeira delas, o número **MÁXIMO** de tentativas necessárias para acessar sua conta será

A) 210 B) 230 C) 2 520 D) 3 360 E) 15 120

02. (UNIFESP–2006) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

A) PROVA.
B) VAPOR.
C) RAPOV.
D) ROVAP.
E) RAOPV.

03. (UFMG) Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

A) $3.(5!)^3$
B) $(5!)^3$
C) $(5!)^3.(3!)$
D) $\frac{15!}{3!.5!}$

04. (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco podem se posicionar na fila única dos caixas de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?

A) 4!.7!
B) 5!.6!
C) 6.6!
D) 10.6!
E) 4! + 10!

05. (UFSM-RS) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

A) 12 B) 30 C) 42 D) 240 E) 5 040

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFJF-MG) Podemos ordenar as pessoas que estão numa certa fila de 24 maneiras diferentes. Então, nessa fila estão

A) 4 pessoas.
B) 5 pessoas.
C) 6 pessoas.
D) 12 pessoas.
E) 24 pessoas.

02. (Mackenzie-SP) O número de filas diferentes que podem ser formadas com 2 homens e 3 mulheres, de modo que os homens não fiquem juntos, é

A) 96 B) 72 C) 48 D) 84 E) 120

03. (VUNESP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras em que os quatro podem ficar dispostos de modo que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos, e João e Rita fiquem sempre juntos é

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

04. (UEL-PR) Usando uma vez a letra **A**, uma vez a letra **B** e n – 2 vezes a letra **C**, podemos formar 20 anagramas diferentes com **n** letras em cada anagrama. O valor de **n** é

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

05. (ITA-SP) Quantos anagramas da palavra CADERNO apresentam as vogais na ordem alfabética?

A) 2 520
B) 5 040
C) 1 625
D) 840
E) 680

06. (UFMG) Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Nesse caso, o número de maneiras diferentes de se fazer a programação dessa semana é

A) 144 B) 576 C) 720 D) 1 040

07. (UNESP) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia é

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

08. (FGV-SP) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR de modo que as letras **A** e **R** fiquem juntas em qualquer ordem?

A) 360
B) 720
C) 1 080
D) 1 440
E) 1 800

09. (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

I. Leva seu neto Pedrinho, às 13 horas, para a escola;
II. Pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;
III. Passeia com o cachorro da família;
IV. Pega seu neto Pedrinho, às 17 horas, na escola;
V. Rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades sempre na mesma ordem, ele resolveu que, a cada dia, vai realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de maneiras **POSSÍVEIS** de ele realizar essas cinco atividades, em ordem diferente, é

A) 24 B) 60 C) 72 D) 120

10. (ITA-SP) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

A) 144 B) 180 C) 240 D) 288 E) 360

11. (UFMG) Considere formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. O número 75 391 ocupa, nessa disposição, o lugar

A) 21º B) 64º C) 88º D) 92º E) 120º

12. (UFOP-MG) De quantas maneiras diferentes, oito crianças podem ser dispostas ao redor de um círculo em uma brincadeira de roda?

A) 8! B) 7! C) 8 D) 7 E) 16

13. (UnB-DF) Em um tabuleiro quadrado, de 5 x 5, mostrado na figura I, deseja-se ir do quadrado esquerdo superior (ES) ao quadrado direito inferior (DI). Somente são permitidos os movimentos horizontal (**H**), vertical (**V**) e diagonal (**D**), conforme ilustrado na figura II.

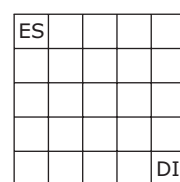



Figura I

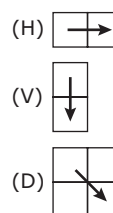



Figura II

Com base nessa situação e com o auxílio dos princípios de análise combinatória, julgue os itens que se seguem.

( ) Se forem utilizados somente movimentos horizontais e verticais, então o número de percursos possíveis será igual a 70.

( ) Se forem utilizados movimentos horizontais e verticais e apenas um movimento diagonal, o número de percursos possíveis será igual a 140.

( ) Utilizando movimentos horizontais, verticais e três movimentos diagonais, o número de percursos possíveis é igual a 10.

14. (UFJF-MG) Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é

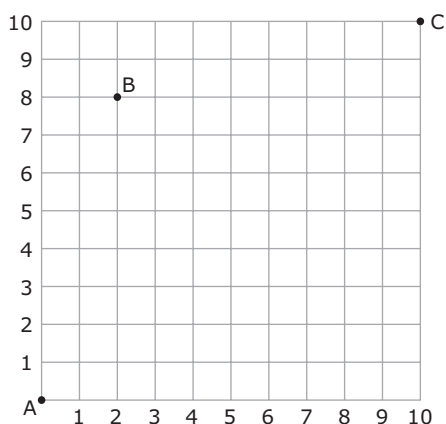
A) 288
B) 296
C) 864
D) 1 728

15. (UFRJ–2007) Um sítio da Internet gera uma senha de 6 caracteres para cada usuário, alternando letras e algarismos. A senha é gerada de acordo com as seguintes regras:

i) Não há repetição de caracteres;
ii) Começa-se sempre por uma letra;
iii) O algarismo que segue uma vogal corresponde a um número primo;
iv) O algarismo que segue uma consoante corresponde a um número par.

Quantas senhas podem ser geradas de forma que as três letras sejam **A**, **M** e **R**, em qualquer ordem?

16. (UFJF-MG) Um vagão de metrô tem 8 bancos individuais, sendo 4 de frente e 4 de costas. De 8 passageiros, 3 preferem sentar de frente, 2 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos 8 passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

17. (UFMG) Observe a figura.

Considere os caminhos ligando **A** a **C**, passando por **B**, traçados a partir de **A**, deslocando-se sempre, ou 1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade para cima, na vertical. **DETERMINE** o número total de caminhos distintos obtidos dessa forma.

SEÇÃO ENEM

01. O cerimonial de um evento deve acomodar quatro delegações participantes em um auditório. Sabe-se que o evento contará com a participação de 5 representantes de Minas Gerais, 4 representantes de São Paulo, 7 representantes do Rio de Janeiro e 6 representantes do Ceará. Para acomodar os participantes, o cerimonial separou 22 poltronas em uma das fileiras do auditório, cada uma marcada com o nome do respectivo participante. Porém, os representantes do Ceará e de São Paulo desejam sentar-se juntos, enquanto as demais delegações não fizeram tal exigência. O total de maneiras de o cerimonial posicionar os participantes na fileira, atendendo às condições apresentadas, é dado por

A) 14!.6!.4!

B) 22!.6!.4!

C) 5!.7!.6!.4!

D) 10!.6!.4!

E) 15!.12!.4!

02. A fim de aumentar a competitividade, as empresas necessitam aprimorar suas técnicas de gerenciamento de recursos, equipamentos e informações. Tais técnicas são chamadas de Logística e são fundamentais para operações de carga e descarga em larga escala, como no porto ilustrado na figura a seguir:

Disponível em: <http://g1.globo.com/Noticias/Vestibular/foto/0,,15366097>. Acesso em: 10 set. 2010.

Considere que a administração do porto da figura pretende alocar 5 contêiners contendo minério de ferro (tipo **A**), 3 contêiners contendo produtos eletrônicos (tipo **B**) e 4 contêiners contendo peças automotivas (tipo **C**). Cada contêiner possui um número de identificação diferente. Um determinado setor do navio tem capacidade para 6 contêiners, e deve ser preenchido, obrigatoriamente, com dois contêiners de cada tipo. O total de maneiras de se colocar os contêiners nesse setor, em fila, de modo que contêiners do mesmo tipo permaneçam juntos, é igual a

A) 8 640
B) 7 240
C) 6 280
D) 5 320
E) 4 600

GABARITO

Fixação

01. E 02. E 03. C 04. A 05. C

Propostos

01. A
02. B
03. C
04. C
05. D
06. C
07. D
08. D
09. B
10. A
11. C
12. B
13. V V F
14. D
15. 432
16. 1 728
17. 2 025

Seção Enem

01. A 02. A

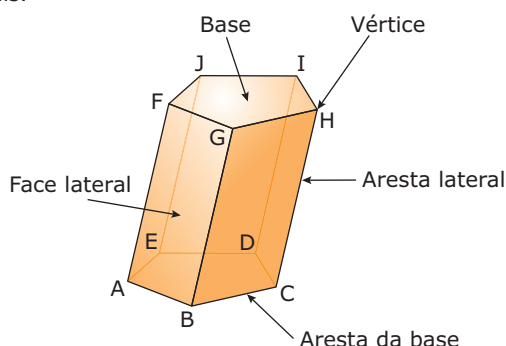
MATEMÁTICA

Prismas

MÓDULO 07 FRENTE B

DEFINIÇÃO

Prisma é todo poliedro convexo construído tomando-se dois polígonos congruentes situados em planos paralelos e unindo-se os pontos desses polígonos através de segmentos paralelos.

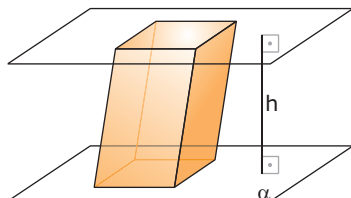
Na figura a seguir, temos um prisma cujas bases são os pentágonos congruentes ABCDE e FGHIJ. Os paralelogramos que unem as duas bases do prisma são denominados faces laterais.

Podemos, então, identificar no prisma mostrado os seguintes elementos:

i) Bases: faces ABCDE e FGHIJ

ii) Arestas da base: (AB, BC, CD, DE, EA) e (FG, GH, HI, IJ, JF)

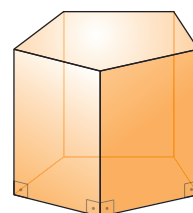
iii) Faces laterais: paralelogramos BCHG, CDIH, DEJI, EAFJ, ABGF

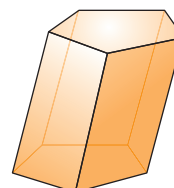
iv) Arestas laterais: CH, DI, EJ, AF, BG

A altura de um prisma é a distância **h** entre os planos das bases.

NOMENCLATURA

Um prisma será chamado triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

CLASSIFICAÇÃO

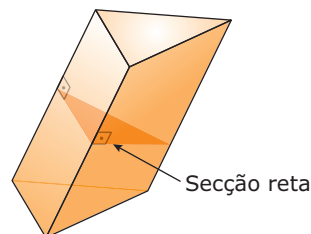
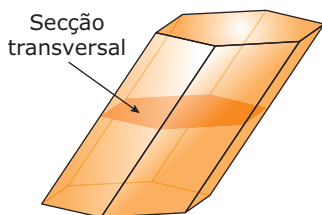
Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto, as faces laterais são retângulos.

Prisma pentagonal reto

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma pentagonal oblíquo

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

SECÇÕES

Secção de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Secção reta ou secção normal é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

Secção transversal é uma secção cujo plano é paralelo às bases.

ÁREAS

Área lateral (A_ℓ) é a soma das áreas das faces laterais.

Área total é a soma da área lateral com as áreas das bases.

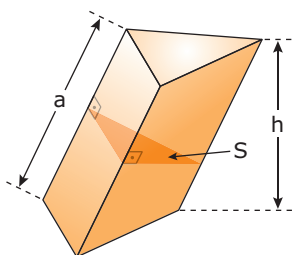
$$A_T = A_\ell + 2.A_B$$

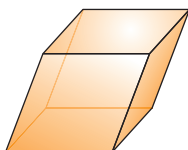
VOLUME

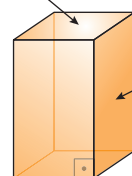
O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

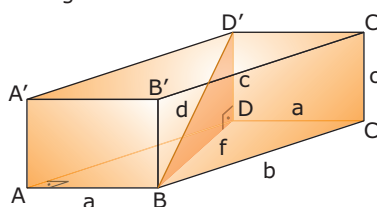
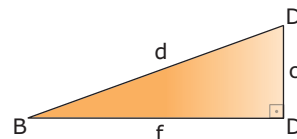
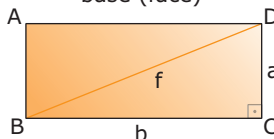
$$V = A_B.h$$

Pode-se demonstrar também que o volume de um prisma é o produto da área da secção reta pela medida da aresta.

$$V = S.a$$

PARALELEPÍPEDOS

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

Paralelepípedo (oblíquo)

Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) e de dois paralelogramos (bases).

Paralelepípedo (reto)

Paralelepípedo reto retângulo ou paralelepípedo retângulo, ou ortoedro, é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.

A) Cálculo da diagonal d

No triângulo BCD, temos $f^2 = a^2 + b^2$.

No triângulo BDD', temos $d^2 = f^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

B) Cálculo da área total S

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles (ABCD, A'B'C'D') com dimensões **a** e **b**, outros dois (ABB'A', DCC'D') com dimensões **a** e **c** e os últimos dois (ADD'A', BCC'B') com dimensões **b** e **c**.

Logo:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

C) Cálculo do volume V

O volume de um prisma, como sabemos, é o produto da área da base pela altura, ou seja, $V = A_B.h$.

Assim, para o paralelepípedo retângulo, temos:

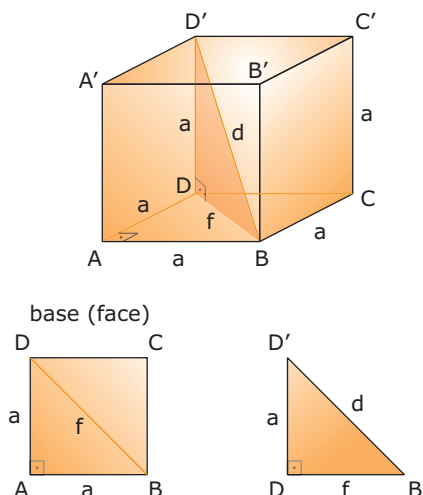
$$A_B = a.b \quad e \quad h = c$$

Então:

$$V = a.b.c$$

CUBO

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

base (face)

Dado um cubo de aresta **a**, calculemos sua diagonal **d**, sua área total **S** e seu volume **V**.

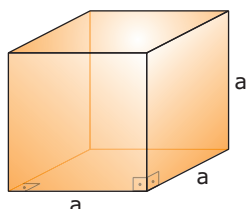
A) Cálculo da diagonal d

Inicialmente, calculemos a medida **f** de uma diagonal de face.

No triângulo BAD, temos $f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$.

No triângulo BDD′, temos $d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$

B) Cálculo da área total S

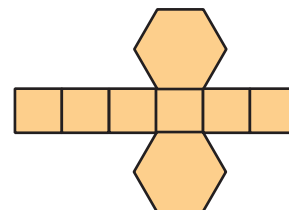
A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado **a**. A área de cada um é a^2. Então, a área total do cubo é:

C) Cálculo do volume V

No cubo de aresta **a**, temos:

$$A_B = a.a \text{ e } h = a$$

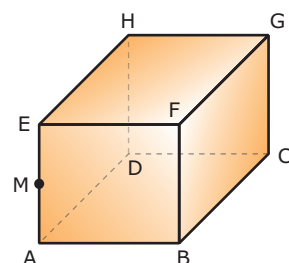
Então:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFRGS–2006) Na figura a seguir, está representada a planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base. Se a altura do prisma é 2, seu volume é

A) $4\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{3}$

02. (UFOP-MG–2009) Maíra adora brincar na piscina da casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de comprimento. A parte rasa tem 0,5 m de profundidade, e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é

A) 6 000
B) 8 000
C) 9 000
D) 10 000

03. (FUVEST-SP–2007) O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimento **a**.

Sabendo-se que **M** é o ponto médio da aresta AE, então a distância do ponto **M** ao centro do quadrado ABCD é igual a

A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$
B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
D) $a\sqrt{3}$
E) $2a\sqrt{3}$

04. (UFMG) Um reservatório cúbico de 50 cm de profundidade está com água até a metade e precisa ser totalmente esvaziado. O volume de água a ser retirado desse reservatório é de

A) 62,5 litros.
B) 125 litros.
C) 250 litros.
D) 25 litros.

05. (VUNESP) As arestas do cubo ABCDEFGH, representado pela figura, medem 1 cm. Se **M**, **N**, **P** e **Q** são os pontos médios das arestas a que pertencem, então o volume do prisma DMNCHPQG é

A) 0,625 cm³.
B) 0,725 cm³.
C) 0,745 cm³.
D) 0,825 cm³.
E) 0,845 cm³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG–2008) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é **CORRETO** afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários

A) 40 min.
B) 240 min.
C) 400 min.
D) 480 min.

02. (UFMG) A capacidade de um reservatório em forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são 50 cm, 2 m e 3 m, é, em litros,

A) 3
B) 30
C) 300
D) 3 000
E) 30 000

03. (FUVEST-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e, em seguida, o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e **x** cm. O valor de **x** é

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

04. (UFV-MG) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um paralelepípedo retangular e mede 1,20 m de comprimento, 0,50 m de largura e 2,00 m de altura. Uma pedra de forma irregular é colocada no recipiente, ficando totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que o nível da água sobe 1 m. Assim, é **CORRETO** concluir que o volume da pedra, em m³, é

A) 0,06 B) 0,6 C) 6 D) 60 E) 600

05. (PUC Minas–2006) Em um reservatório cúbico, enquanto o nível de água varia de 8,0 cm para 10,4 cm, o volume de água aumenta de 143,2 litros para 179,0 litros. Com base nesses dados, é **CORRETO** afirmar que, com um acréscimo de 2,4 cm no nível da água, o volume de água tem um aumento percentual igual a

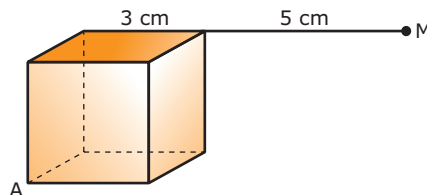
A) 18%.
B) 20%.
C) 25%.
D) 30%.

06. (UFMG) Dona Margarida comprou terra adubada para sua nova jardineira, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são: 1 m de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de altura. Sabe-se que 1 kg de terra ocupa um volume de 1,7 dm³. Nesse caso, para encher totalmente a jardineira, a quantidade de terra que Dona Margarida deverá utilizar é, aproximadamente,

A) 85,0 kg.
B) 8,50 kg.
C) 29,4 kg.
D) 294,1 kg.

07. (UFJF-MG) Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo retângulo. O volume da caixa será duplicado se

A) dobrarmos todas as suas dimensões.
B) triplicarmos todas as suas dimensões.
C) dobrarmos duas das suas dimensões, mantendo-se a terceira dimensão inalterada.
D) triplicarmos sua altura, mantendo-se as duas outras dimensões inalteradas.
E) dobrarmos uma de suas dimensões, mantendo-se as outras duas dimensões inalteradas.

08. (Cesgranrio) Na figura, cada aresta do cubo mede 3 cm. Prolongando-se uma delas de 5 cm, obtemos o ponto **M**. A distância, em centímetros, de **M** ao vértice **A** é

A) $2\sqrt{21}$
B) $\sqrt{82}$
C) $8\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{2}$
E) 9

09. (VUNESP) As faces de um paralelepípedo retangular têm por área 6 cm², 9 cm² e 24 cm². O volume desse paralelepípedo é

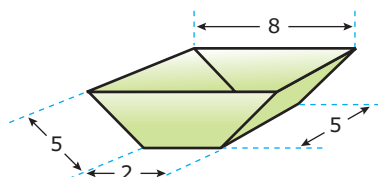
A) 1 296 cm³.

B) 48 cm³.

C) 39 cm³.

D) 36 cm³.

E) $6\sqrt{6}$ cm³.

10. (PUC-SP) Um tanque de uso industrial tem a forma de um prisma, cuja base é um trapézio isósceles. Na figura a seguir, são dadas as dimensões, em metros, do prisma.

O volume desse tanque, em metros cúbicos, é

A) 50

B) 60

C) 80

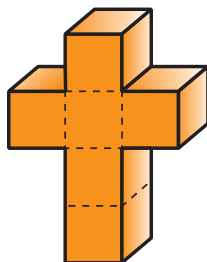
D) 100

E) 120

11. (Unicamp-SP) Ao serem tirados 128 litros de água de uma caixa-d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

A) **CALCULE** o comprimento das arestas da referida caixa.

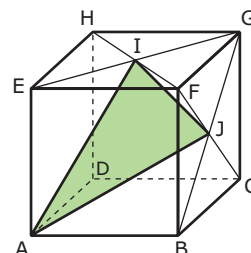
B) **CALCULE** sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

12. (UFU-MG) Considere uma cruz formada por 6 cubos idênticos e justapostos, como na figura adiante. Sabendo-se que a área total da cruz é de 416 cm², pode-se afirmar que o volume de cada cubo é igual a

A) 16 cm³.

B) 64 cm³.

C) 69 cm³.

D) 26 cm³.

13. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, **I** e **J** são os centros das faces EFGH e BCGF do cubo ABCDEFGH de aresta **a**. Os comprimentos dos segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{IJ}$ são, respectivamente,

A) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $a\sqrt{6}$

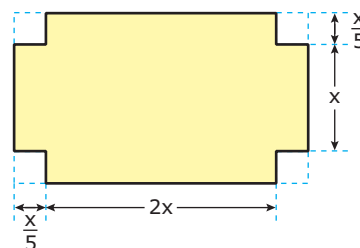
B) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C) $a\sqrt{6}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D) $a\sqrt{6}$, $a\sqrt{2}$

E) $2a$, $\frac{a}{2}$

14. (VUNESP) Uma caixa-d'água, com a forma de um paralelepípedo reto de 1 m x 1 m de base e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m de altura, está sobre uma laje horizontal com água até a altura **h**. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse 30°. **CALCULE** a altura **h**.

15. (Unicamp-SP) A figura a seguir é a planificação de uma caixa sem tampa.

A) **ENCONTRE** o valor de **x**, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

B) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros, considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

16. (FGV-SP–2006) Antes que fosse reparado um vazamento em uma piscina retangular, com 20 m de comprimento e 10 m de largura, ocorreu uma perda de 20 000 litros de água, fazendo com que o nível de água baixasse em

A) 1 m.

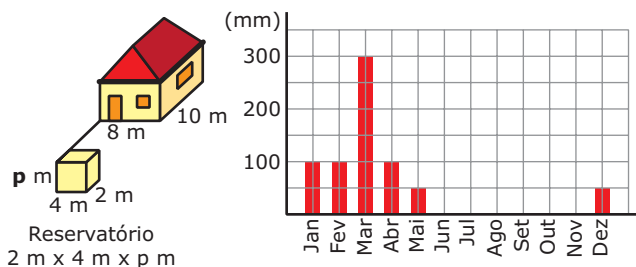
B) 0,5 m.

C) 0,1 m.

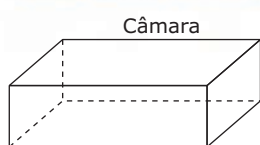
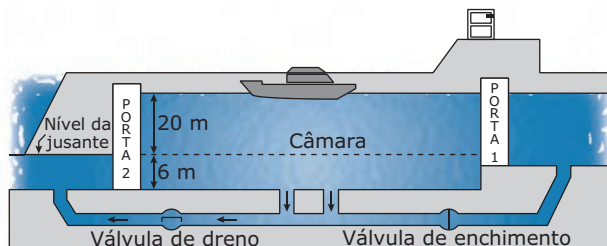
D) 0,2 m.

E) 0,01 m.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2003) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso. As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.

Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade **p** do reservatório deverá medir

A) 4 m. B) 5 m. C) 6 m. D) 7 m. E) 8 m.

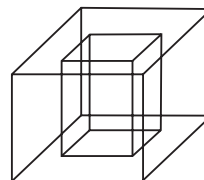
02. (Enem–2006) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do Porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.

Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de

A) 2 minutos.
B) 5 minutos.
C) 11 minutos.
D) 16 minutos.
E) 21 minutos.

03. (Enem–2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

A) 5 cm.
B) 6 cm.
C) 12 cm.
D) 24 cm.
E) 25 cm.

04. (Enem–2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

A) 12 cm^3.
B) 64 cm^3.
C) 96 cm^3.
D) 1 216 cm^3.
E) 1 728 cm^3.

GABARITO

Fixação

01. E 02. C 03. C 04. A 05. A

Propostos

01. C
02. D
03. D
04. B
05. C
06. C
07. E
08. B
09. D
10. D
11. A) a = 8 dm
B) V = 512 litros
12. B
13. B
14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ metros
15. A) 50 cm
B) R$ 8,40
16. C

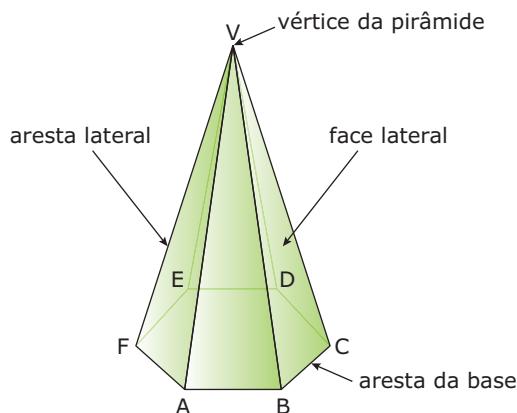
Seção Enem

01. D 02. D 03. B 04. D

Pirâmides

DEFINIÇÃO

Pirâmide é todo poliedro convexo construído unindo-se os vértices de um polígono qualquer (base da pirâmide) a um mesmo ponto (vértice da pirâmide) situado fora do plano desse polígono.

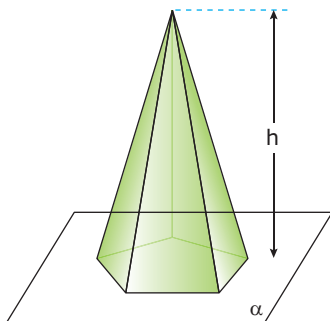
Na figura a seguir, temos uma pirâmide de base ABCDEF e vértice **V**. Com exceção da base, as demais faces são formadas por um lado da base e pelo vértice da pirâmide. São sempre triângulos e denominadas faces laterais.

Podemos, então, identificar, na pirâmide mostrada, os seguintes elementos:

i) Base: face ABCDEF

ii) Arestas da base: AB, BC, CD, DE, EF e FA

iii) Faces laterais: os triângulos BCV, CDV, DEV, EFV, FAV e ABV

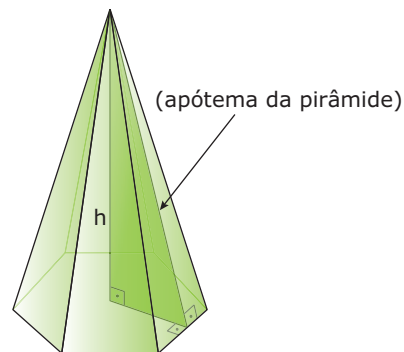
iv) Arestas laterais: CV, DV, EV, FV, AV e BV

A altura de uma pirâmide é a distância **h** entre o vértice e o plano da base.

NOMENCLATURA

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

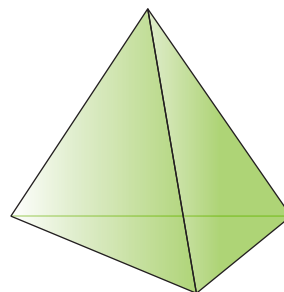
PIRÂMIDE REGULAR

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes, e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

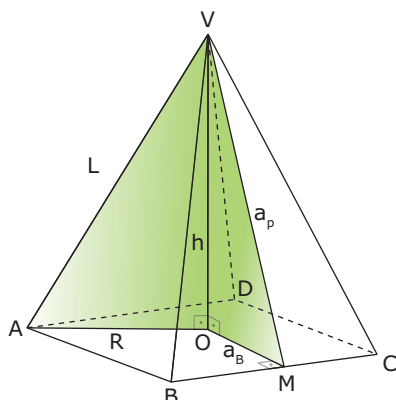
Chama-se apótema de uma pirâmide regular a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.

Pirâmide regular hexagonal

TETRAEDRO

Tetraedro é uma pirâmide triangular.

Tetraedro regular é um tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si.

Tetraedro

RELAÇÕES NUMA PIRÂMIDE REGULAR

Considere a pirâmide quadrangular regular VABCD:

Em que:

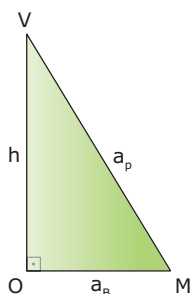
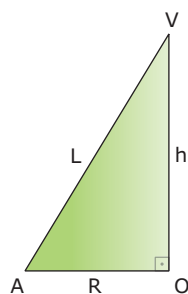
VM = a_p é o apótema da pirâmide regular (altura da face lateral);

OM = a_B é o apótema da base;

OA = **R** é o raio da circunferência circunscrita à base;

VA = **L** é a aresta lateral da pirâmide;

VO = **h** é a altura da pirâmide.

Dos triângulos sombreados na figura anterior, tiramos as seguintes relações, válidas para toda pirâmide regular:

$$a_p^2 = h^2 + a_B^2$$

$$L^2 = h^2 + R^2$$

ÁREAS LATERAL E TOTAL

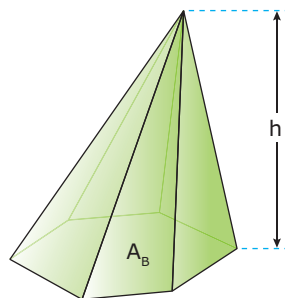
Para uma pirâmide qualquer, a área lateral corresponde à soma das áreas de todas as faces laterais.

Como em uma pirâmide regular as faces laterais são triângulos isósceles congruentes, para calcularmos a área lateral, fazemos a área de uma face lateral multiplicada pelo número de faces laterais.

A área total de uma pirâmide corresponde à soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = A_\ell + A_B$$

VOLUME

Sejam A_B a área da base e **h** a altura de uma pirâmide qualquer. O volume **V** dessa pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3}.A_B.h$$

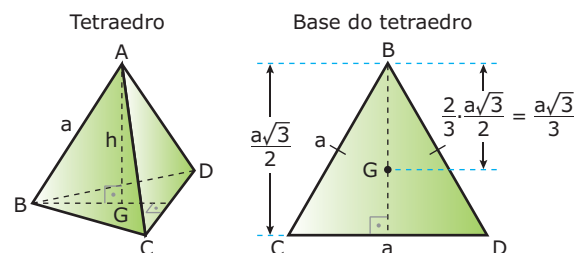
EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. De um tetraedro regular de aresta **a**, calcular

A) a área total A_T.

B) a medida **h** da altura.

C) o seu volume **V**.

Resolução:

A) Área total:

$$A_T = 4A_B \Rightarrow A_T = 4\left(\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3}$$

B) Cálculo da altura:

Do triângulo AGB, temos:

$$h^2 = a^2 - (BG)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

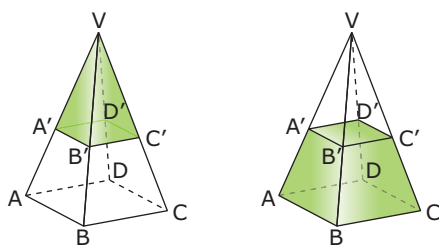
C) Volume:

$$V = \frac{1}{3}.A_B.h, \text{ em que } A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Então:}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

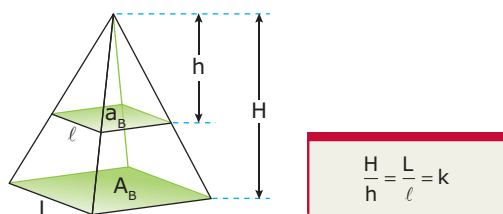
SECÇÃO DE UMA PIRÂMIDE POR UM PLANO PARALELO À BASE

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos.

O sólido que contém o vértice é uma nova pirâmide, e o sólido que contém a base da pirâmide é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (arestas das bases, arestas laterais, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que elas são semelhantes.

Razão de semelhança

Dadas duas pirâmides semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.

$$\frac{H}{h} = \frac{L}{\ell} = k$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

$$\frac{A_B}{a_B} = \frac{L^2}{\ell^2} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = k^2$$

Para razões entre volumes das pirâmides semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes das pirâmides grande e pequena, respectivamente, temos:

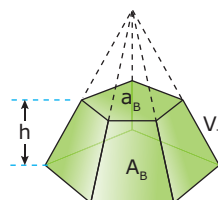
$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3$$

Podemos, então, generalizar da seguinte maneira:

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

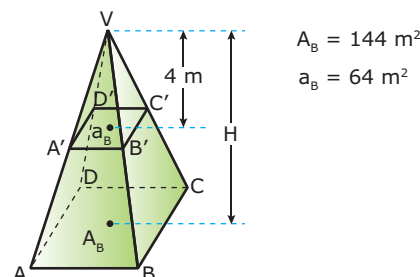
Dadas a área A_B da base maior, a área a_B da base menor e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco da pirâmide pode ser obtido por meio da fórmula:

$$V_T = \frac{h}{3}\left[A_B + \sqrt{A_B.a_B} + a_B\right]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m² de área. A 4 m do vértice, traça-se um plano paralelo à base, e a secção assim feita tem 64 m² de área. Qual a altura da pirâmide?

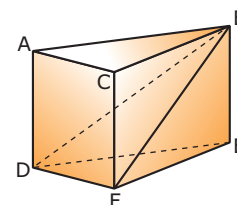
Resolução:

A_B = 144 m²

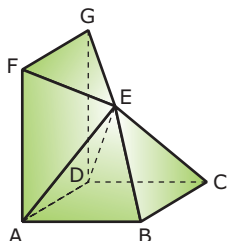
a_B = 64 m²

Fazendo semelhança entre as pirâmides VABCD e VA′B′C′D′, temos:

$$\frac{A_B}{a_B} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{144}{64} = \left(\frac{H}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{H}{4} \Rightarrow H = 6\text{ m}$$

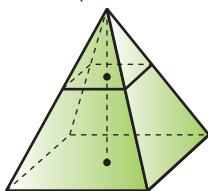
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) Observe a figura.

Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices **B**, **D** e **F** divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1, e DEFB, de volume V_2. Assim, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é

A) 1
B) $\frac{3}{2}$
C) 2
D) $\frac{5}{2}$

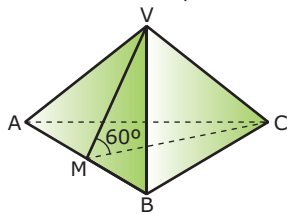
02. (UFSCar-SP) As bases ABCD e ADGF das pirâmides ABCDE e ADGFE são retângulos e estão em planos perpendiculares. Sabe-se também que ABCDE é uma pirâmide regular de altura 3 cm e apótema lateral 5 cm, e que ADE é a face lateral comum às duas pirâmides.

Se a aresta $\overline{AF}$ é 5% maior que a aresta $\overline{AD}$, então o volume da pirâmide ADGFE, em cm^3, é

A) 67,2 B) 80 C) 89,6 D) 92,8 E) 96

03. (UFMG) Corta-se uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais. A altura do tronco de pirâmide obtido é, em centímetros,

A) 1
B) $4 - 2\sqrt[3]{4}$
C) 2
D) $4 - \sqrt{2}$
E) $4 - \sqrt[4]{2}$

04. (UFOP-MG–2009) Considere um prisma cuja base é um hexágono regular de lado ℓ, e uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero com lados medindo o triplo de ℓ. Se o volume do prisma é o dobro do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é

A) o quádruplo da altura do prisma.
B) o triplo da altura do prisma.
C) o dobro da altura do prisma.
D) igual à altura do prisma.

05. (FUVEST-SP) A figura a seguir representa uma pirâmide de base triângular ABC e vértice **V**. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos equiláteros de lado ℓ, e que **M** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se a medida do ângulo $V\hat{M}C$ é 60º, então o volume da pirâmide é

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^3$ B) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^3$ C) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$ D) $\frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$ E) $\frac{\sqrt{3}}{18}\ell^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m, e a altura da pirâmide, 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número **MÍNIMO** de lotes de telhas a ser comprado é

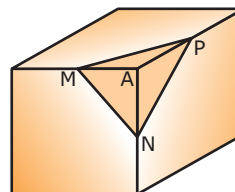
A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

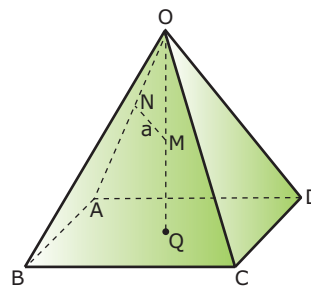
02. (UFES) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo. Podemos obter uma pirâmide tomando o quadrado ABCD como base e A' como vértice. A área lateral dessa pirâmide mede

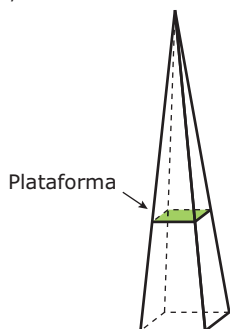
A) $(1 + \sqrt{2})$ cm^2.
B) $2(1 + \sqrt{2})$ cm^2.
C) $(3 + \sqrt{2})$ cm^2.
D) $2(2 + \sqrt{2})$ cm^2.
E) $(2 + \sqrt{2})$ cm^2.

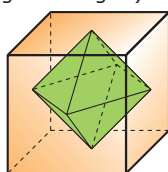
03. (Cesgranrio) Em um tetraedro OABC, os ângulos entre as arestas que concorrem em **O** são todos iguais a 90º. Se OA = 3, OB = 5 e OC = 12, o comprimento da maior aresta do tetraedro é

A) 20 B) 15 C) 13 D) $\frac{25}{2}$ E) 12

04. (VUNESP) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira, recorta-se uma pirâmide AMNP, em que **M**, **N** e **P** são os pontos médios das arestas, como se mostra na figura. Se **V** é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta, ao retirar as 8 pirâmides, é igual a

A) $\frac{1}{2}$V B) $\frac{3}{4}$V C) $\frac{2}{3}$V D) $\frac{5}{6}$V E) $\frac{3}{8}$V

05. (VUNESP) A figura a seguir mostra uma pirâmide regular de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que as arestas da base. Pelo ponto médio **M** da altura $\overline{OQ}$, traça-se o segmento $\overline{MN}$ perpendicular à aresta $\overline{OA}$.

Se **a** expressa a medida de $\overline{MN}$, **DETERMINE** o volume da pirâmide em função de **a**.

06. (UFG–2008) A figura a seguir representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela à base. Se os lados da base e da plataforma medem, respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da torre, em metros, é

A) 75 B) 90 C) 120 D) 135 E) 145

07. (UFSCar-SP) Os segmentos de reta que unem os pontos centrais das faces adjacentes de um cubo determinam um octaedro (ver figura a seguir).

Se a aresta do cubo mede ℓ cm, então o volume do octaedro é igual a

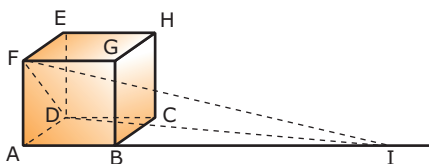
A) $\frac{\ell^3}{8}$ cm³.

B) $\frac{\ell^3}{4}$ cm³.

C) $\frac{\ell^3}{5}$ cm³.

D) $\frac{\ell^3}{7}$ cm³.

E) $\frac{\ell^3}{6}$ cm³.

08. (UFF-RJ–2006) Considere ABCDEFGH um cubo cuja aresta mede 1 cm e **I** um ponto no prolongamento da aresta $\overline{AB}$, de tal modo que o volume do tetraedro ADFI tenha o mesmo volume do cubo ABCDEFGH.

DETERMINE a medida do segmento $\overline{BI}$.

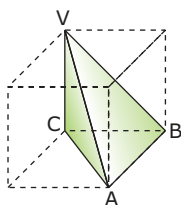
09. (Cesgranrio) Em um cubo de aresta $\sqrt[3]{6}$, considere-se o tetraedro VABC, como indicado na figura. O volume do tetraedro é

A) 2

B) $\sqrt{2}$

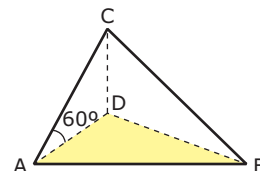
C) $\sqrt[3]{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) 1

10. (UFMG) Sabe-se que, no tetraedro da figura, AB = 5 m, BD = 4 m, AD = 3 m e $D\hat{A}C = 60°$. Se CD é perpendicular ao plano de ABD, então o volume do tetraedro, em m³, é

A) $6\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{3}$

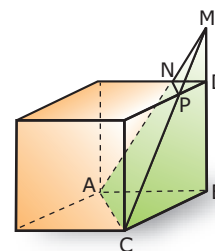
E) $4\sqrt{3}$

11. (FUVEST-SP) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?

A) 1 B) $\sqrt{1,5}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2,5}$ E) $\sqrt{3}$

12. (UFSM-RS) Assinale a alternativa que apresenta a razão entre os volumes de um tetraedro regular e de um cubo cujas arestas são iguais.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

13. (UFMG) Nesta figura, estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide MABC, que possui três vértices em comum com o cubo. O ponto **M** situa-se sobre o prolongamento da aresta $\overline{BD}$ do cubo. Os segmentos $\overline{MA}$ e $\overline{MC}$ interceptam as arestas desse cubo, respectivamente, nos pontos **N** e **P**, e o segmento $\overline{ND}$ mede 1 cm.

Considerando-se essas informações, é **CORRETO** afirmar que o volume da pirâmide MNPD é, em cm³,

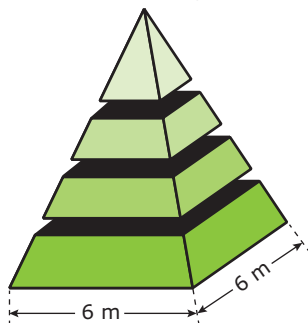
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}$

14. (UEL-PR) Considere uma pirâmide regular, de altura 25 m e base quadrada de lado 10 m. Seccionando essa pirâmide por um plano paralelo à base, à distância de 5 m desta, obtém-se um tronco cujo volume, em m³, é

A) $\frac{200}{3}$ B) 500 C) $\frac{1\,220}{3}$ D) $\frac{1\,280}{3}$ E) 1 220

15. (UFRJ) Uma pirâmide regular tem base quadrada de área 4. Ela é seccionada por um plano paralelo à base de modo a formar um tronco de pirâmide de altura 2 e de base superior de área 1. **DETERMINE** o valor da aresta lateral do tronco da pirâmide.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

A) 156 cm³
B) 189 cm³
C) 192 cm³
D) 216 cm³
E) 540 cm³

02. (Enem–2009) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

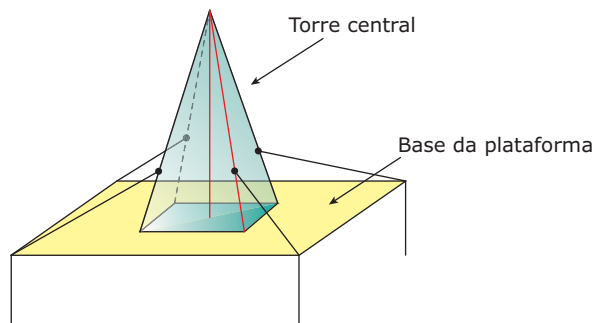
A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

D) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

E) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

03. (Enem–2010) Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central. Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.

Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

A) $\sqrt{288}$
B) $\sqrt{313}$
C) $\sqrt{328}$
D) $\sqrt{400}$
E) $\sqrt{505}$

GABARITO

Fixação

01. C 02. C 03. B 04. D 05. D

Propostos

01. A
02. A
03. C
04. D
05. $8\sqrt{3}a^3$
06. D
07. E
08. 5 cm
09. E
10. A
11. A
12. E
13. B
14. C
15. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Seção Enem

01. B 02. C 03. D

MATEMÁTICA

Inequações

MÓDULO 07 FRENTE C

INTRODUÇÃO

Sabemos que uma inequação é uma relação caracterizada pela presença dos seguintes sinais de desigualdade: >, <, ≥ ou ≤. Vejamos alguns exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x - 3 > 18$.

Resolução:

$x - 3 > 18 \Rightarrow x > 21$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 21\}$

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-2 \leq \frac{x+4}{3} < 8$.

Resolução:

Multiplicando-se todos os termos da inequação por 3, temos:

$-6 \leq x + 4 < 24$

Subtraindo-se −4 de todos os termos, temos:

$-10 \leq x < 20$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 20\}$

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Resolução:

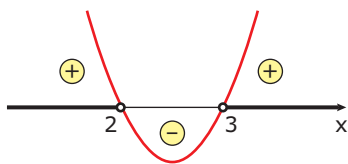
Inicialmente, vamos calcular as raízes da função:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4.1.6 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

Representando o gráfico, temos:

Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$
$y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

INEQUAÇÃO PRODUTO

Chamamos de inequação produto a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por um produto de funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo.

Exemplos

1º) $(x - 2).(x - 3) \geq 0$

2º) $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$

3º) $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$

Para resolvermos uma inequação produto, devemos estudar o sinal de cada uma das funções que estão sendo multiplicadas. Em seguida, obtemos o resultado, analisando os sinais obtidos e utilizando o chamado **quadro de sinais**.

Exemplos

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 2).(x - 3) \geq 0$.

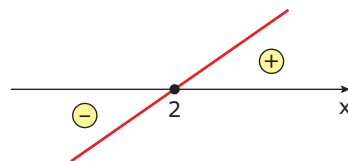
Resolução:

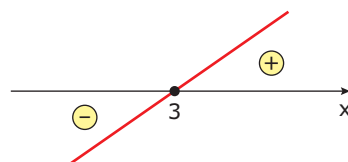
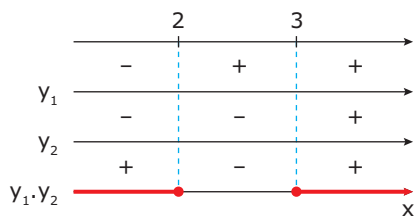
Vamos denotar cada função por y_1 e y_2 e estudar o sinal de cada uma delas.

$\overbrace{(x-2)}^{y_1}.\overbrace{(x-3)}^{y_2} \geq 0$

Estudo do sinal

$y_1 = x - 2$

Raiz: $x = 2$

$y_2 = x - 3$

Raiz: $x = 3$

Quadro de sinais

Como queremos saber em quais intervalos o produto é positivo ou igual a zero, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

OBSERVAÇÃO

As inequações do 2º grau que possuam raízes reais podem ser fatoradas e, portanto, transformadas em inequações produto. Nesse caso, podem ser resolvidas como descrito anteriormente. Por exemplo, a inequação $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ e resolvida com o uso do quadro de sinais.

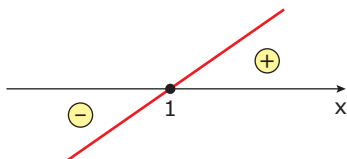
2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$.

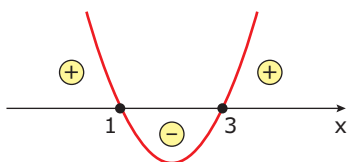
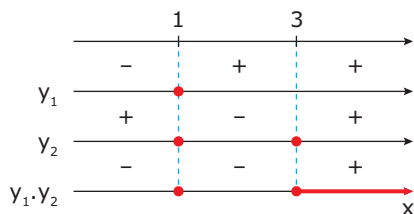
Resolução:

$$\overbrace{(x-1)}^{y_1}.\overbrace{(x^2-4x+3)}^{y_2} \geq 0$$

Estudo do sinal

$y_1 = x - 1$

Raiz: $x = 1$

$y_2 = x^2 - 4x + 3$

Raiz: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

Quadro de sinais

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$.

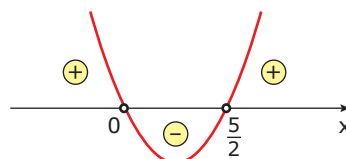
Resolução:

$$\overbrace{(2x^2-5x)}^{y_1}.\overbrace{(2+x-x^2)}^{y_2} < 0$$

$y_1 = 2x^2 - 5x$

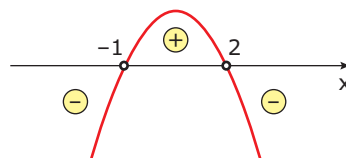
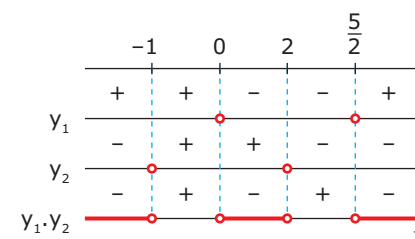
Suas raízes são 0 e $\frac{5}{2}$.

Estudo do sinal

Sinal
$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2}$
$y_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$

$y_2 = 2 + x - x^2$

Suas raízes são –1 e 2.

Estudo do sinal

Sinal
$y_2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$
$y_2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2$

Estudo do sinal do produto $y_1.y_2$

Queremos saber para que valores de **x** temos $y_1.y_2 < 0$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 2 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Chamamos de inequação quociente a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por uma divisão envolvendo funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo. Convém ressaltar que, como se trata de uma divisão, devemos verificar suas condições de existência, ou seja, o denominador não pode ser nulo.

Exemplos

1º) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$ **2º)** $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$

O procedimento para resolução é análogo ao adotado nas inequações produto.

Exemplos

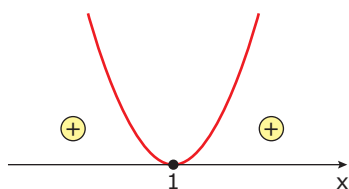
1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$.

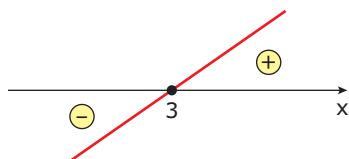
Condição de existência: $x \neq 3$

$$\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{y_1}}{\underbrace{x - 3}_{y_2}} \leq 0$$

Estudo do sinal

$y_1 = x^2 - 2x + 1$

Possui uma raiz dupla igual a 1.

$y_2 = x - 3$

Sua raiz é igual a 3.

Quadro de sinais

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$.

Resolução:

$$\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{y_1}}{\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{y_2}} \geq 0$$

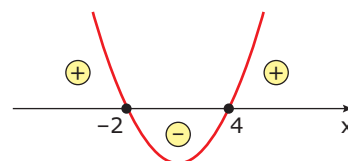
Temos:

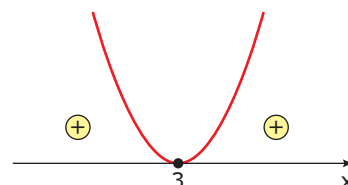
$y_1 = x^2 - 2x - 8$, com raízes −2 e 4

$y_2 = x^2 - 6x + 9$, com raiz dupla 3

Condição de existência: $x \neq 3$

Estudo do sinal de y_1

Sinal
$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 4$
$y_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

Estudo do sinal de y_2

Sinal
$y_2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Quadro de sinais

Queremos saber para que valores de **x** temos $\dfrac{y_1}{y_2} \geq 0$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x \geq 4\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) Considere a função $f(x) = \frac{2x+2}{x-3}$.

O conjunto dos valores de **x** para os quais

$f(x) \in \{y \in \mathbb{R}: 0 < y \leq 4\}$ é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 7\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 7\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

02. (UFG–2006) Duas empresas **A** e **B** comercializam o mesmo produto. A relação entre o patrimônio **y** e o tempo de atividade em anos **x** de cada empresa é representada, respectivamente, por:

$$A: x - 2y + 6 = 0 \text{ e } B: x - 3y + 15 = 0$$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa **A** será superior ao patrimônio da empresa **B** a partir de quantos anos?

A) 3

B) 5

C) 9

D) 12

E) 15

03. (UFPI) O conjunto solução da inequação $\frac{(-x^2+x-20)^3}{x^2(x-1)^5} < 0$ é o intervalo

A) $(1, \infty)$

B) $(-\infty, -1]$

C) $(-\infty, 1)$

D) $[0, \infty)$

E) $(-\infty, 0)$

04. (UFJF-MG–2006) Os valores de **x** que satisfazem a inequação $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ pertencem a

A) $[-1, 2) \cup [3, \infty)$

B) $(-1, 2] \cup (3, \infty)$

C) $[1, 3]$

D) $[-3, 2)$

E) $[-3, -2] \cup (2, \infty)$

05. (Umesp) A função $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4-x^2}}$ tem como domínio, no campo dos reais, os valores de **x** que se encontram na alternativa

A) $\mathbb{R} - \{4\}$

B) $x < -4$ ou $x \geq 0$

C) $0 \leq x < 4$

D) $0 \leq x < 2$

E) $0 < x < 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Rio–2006) Quantos números inteiros satisfazem simultaneamente as desigualdades:

$$2x + 3 \leq x + 7 \leq 3x + 1$$

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2 E) 5

02. (UFMG) O conjunto solução da inequação $-3x + a > 7$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Então, o valor de **a** é

A) 1

B) 2

C) 7

D) 10

E) 13

03. (UFOP–MG) O conjunto solução da inequação $\frac{2x-1}{x} > 1$ é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

04. (FUVEST-SP) Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número **MÍNIMO** de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é

A) 25

B) 26

C) 27

D) 28

E) 29

05. (UFMG) O número real **x** satisfaz $\frac{4x-3}{x+1} > 2$. Assinale a alternativa em que estão incluídas todas as possibilidades para **x**.

A) $-1 < x < \frac{5}{2}$

B) $x < -1$ ou $x > \frac{5}{2}$

C) $x > \frac{5}{2}$

D) $x < -1$

06. (UFV-MG) Seja **p** um número real positivo menor que a sua raiz quadrada. Sobre a inequação $(p - 1)x < p - 1$, em $\mathbb{R}$, é **CORRETO** afirmar que

A) $0 < x < p$

B) $p < x < 1$

C) $x < 1$

D) $x > 1$

E) $0 \leq x \leq 1$

07. (UFSM-RS) O conjunto solução da inequação $\frac{x^2+x-1}{9-x^2} \geq \frac{1}{3-x}$ é dado por

A) $[-3, 3[$

B) $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

C) $]-3, -2] \cup [2, 3[$

D) $[-2, 2]$

E) $[2, \infty[$

08. (PUC Minas) O polinômio $p(x) = (m + 2)x^2 + 2(m - 3)x + m^2$ é negativo para x = 1. Nesse caso, o **MAIOR** valor inteiro de **m** é

A) 0
B) −1
C) −2
D) −3

09. (PUC Minas) O conjunto dos valores de **x** para os quais os pontos do gráfico de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ estão acima do eixo das abscissas é

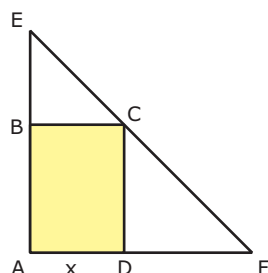
A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 5\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 5\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$

10. (UNESP) Todos os **POSSÍVEIS** valores de **m** que satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo **x** pertencente ao conjunto dos reais, são dados por

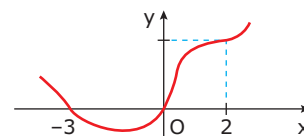
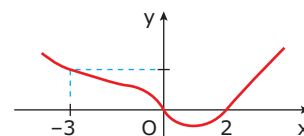
A) m > 10
B) m > 25
C) m > 30
D) m < 5
E) m < 30

11. (UFV-MG) Sejam as funções reais **f** e **g** dadas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{4}{3(x-1)} + \dfrac{8}{3(x+2)}$; o domínio da função composta f o g é

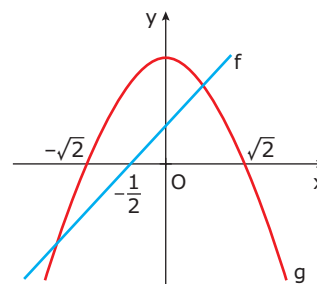
A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 0 \text{ ou } x \ge 1\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 0 \text{ ou } x > 1\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2 \text{ ou } 0 \le x \le 1\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$
E) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x \ge 1\}$

12. (UFF-RJ) No triângulo retângulo representado a seguir, cada um dos catetos mede 3 cm.

Considere um ponto **C** da hipotenusa e o retângulo ABCD, sendo **x** a medida de AD. **DETERMINE**

A) a área **S** do retângulo ABCD em função de **x**.
B) para que valor(es) de **x** se tem $S \le 1{,}25 \text{ cm}^2$.

13. (UFRGS) Os gráficos seguintes representam, respectivamente, as funções y = f(x) e y = g(x). Essas funções se anulam somente nos pontos indicados nas figuras.

A solução da inequação f(x).g(x) > 0 é

A) $(-\infty, 0)$
B) $(0, +\infty)$
C) $(-3, 2)$
D) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
E) $(-3, 0) \cup (0, 2)$

14. (UERJ) Sabe-se que o polinômio $p(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$ pode ser decomposto na forma $p(x) = (2x + 1)(-x^2 + 2)$. Representando as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2$, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, obtém-se o gráfico a seguir:

Tendo por base apenas o gráfico, é possível resolver a inequação $-2x^3 - x^2 + 4x + 2 < 0$. Todos os valores de **x** que satisfazem a essa inequação estão indicados na seguinte alternativa:

A) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > -\dfrac{1}{2}$
B) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$
C) $x < -\sqrt{2}$ ou $-\dfrac{1}{2} < x < \sqrt{2}$
D) $-\sqrt{2} < x < -\dfrac{1}{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

15. (UFRJ–2006) Uma operadora de celular oferece dois planos no sistema pós-pago. No plano **A**, paga-se uma assinatura de R$ 50,00 e cada minuto em ligações locais custa R$ 0,25. No plano **B**, paga-se um valor fixo de R$ 40,00 para até 50 minutos em ligações locais e,a partir de 50 minutos, o custo de cada minuto em ligações locais é de R$ 1,50.

A) **CALCULE** o valor da conta em cada plano para um consumo mensal de 30 minutos em ligações locais.
B) **DETERMINE** a partir de quantos minutos, em ligações locais, o plano **B** deixa de ser mais vantajoso do que o plano **A**.

16. (FEI-SP) **DETERMINE** o domínio da função **f** tal que $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+x-6}}$.

17. (CEFET-MG) O número de soluções inteiras e estritamente positivas da inequação $\dfrac{1}{3x-1} \geq \dfrac{1}{x+1}$ é

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

18. (UFOP-MG) O conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2-4}{x+3} \geq 0$ é

A)]−∞, −2]
B)]−3, +∞[
C) [−2, 2]
D)]−3, −2] ∪ [2, +∞[
E)]−∞, −2] ∪ [2, +∞[

19. (UFTM-MG) O intervalo que satisfaz a inequação $x^2 + bx + 8 \leq 0$ tem comprimento 2. Portanto, o módulo de **b** é

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

20. (FGV-SP–2006) O conjunto solução da inequação $ax^2 - (a^2 + 1)x + a \leq 0$, sendo **a** um número real positivo e menor do que 1, é

A) $\left[a, \dfrac{1}{a}\right]$
B) $\left[-\dfrac{1}{a}, a\right]$
C)]0, a]
D) [−a, 0[
E) $\left]0, \dfrac{1}{a}\right]$

21. (UFLA-MG) Os valores de **a** para os quais a inequação $\dfrac{x}{x^2+4} > \dfrac{x+a}{x^2+1}$ seja verdadeira para todo **x** são

A) $a < -\dfrac{3}{4}$ ou $a > \dfrac{3}{4}$
B) $-\dfrac{3}{4} < a < \dfrac{3}{4}$
C) $a < -\dfrac{3}{4}$
D) $-\dfrac{4}{3} < a < \dfrac{4}{3}$
E) $a > \dfrac{4}{3}$

SEÇÃO ENEM

01. A tabela apresenta parte da planilha de custos de uma fábrica:

Descrição	Custo por unidade produzida (R$)
Matéria-prima	0,8
Mão de obra / Impostos	3
Transporte	0,3
Armazenagem	0,1
Energia	1,8

Além dos custos por unidade produzida, indicados na tabela anterior, essa fábrica possui um custo fixo mensal igual a R$ 46 000,00 devido à locação de máquinas e equipamentos. Devido a limitações da linha de montagem, o número mínimo de peças que podem ser produzidas é igual a 3 000. Sabendo-se que cada unidade é revendida por R$ 11,00, pode-se afirmar que o número de unidades que devem ser produzidas em um mês, para que o lucro líquido mensal da fábrica seja superior a R$ 94 000,00, é

A) 28 000
B) 31 000
C) 35 000
D) 38 000
E) 40 000

GABARITO

Fixação

01. B 02. D 03. A 04. A 05. D

Propostos

01. D 03. B 05. B 07. C 09. B
02. E 04. C 06. D 08. A 10. B

11. B
12. A) $S = 3x - x^2$, $0 < x < 3$
B) $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{5}{2} \leq x < 3$
13. D
14. D
15. A) Plano **A**: 57, 50; Plano **B**: R$ 40,00
B) A partir de 68 minutos em ligações locais.
16. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ e } x \neq 2\}$
17. B 18. D 19. C 20. A 21. C

Seção Enem

01. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 08 FRENTE C

Função modular

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O módulo de um número real **a** é representado por |**a**|.

Em que $|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$

Exemplos

1º) $|3| = 3$

2º) $|-4| = -(-4) = 4$

> Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância do ponto **a** até a origem da reta real.

Propriedades do módulo

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $|x|.|y| = |x.y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

iv) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

v) $|x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

vi) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall y \neq 0$

EQUAÇÃO MODULAR

É toda equação na qual a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos

1º) Resolver a equação $|x| = 8$.

Resolução:

Há dois valores que satisfazem a equação:

$x = -8$ ou $x = 8$

Portanto, S = {–8, 8}.

2º) Resolver a equação $|x - 4| = 10$.

Resolução:

Se um número possui módulo 10, esse número pode ser igual a –10 ou 10. Portanto, temos:

$$\begin{cases} x - 4 = 10 \\ \text{ou} \\ x - 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Portanto, S = {–6, 14}.

3º) Resolver a equação $|2x + |x - 1|| = 5$.

Resolução:

Resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{cases} 2x + |x - 1| = 5 \\ \text{ou} \\ 2x + |x - 1| = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ |x - 1| = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| = -2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

ou

$$|x - 1| = -2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x - 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Substituindo cada um dos resultados na equação original, verificamos que $x = -6$ ou $x = 2$ são soluções da equação.

Portanto, S = {–6, 2}.

4º) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 3| = 14$

Resolução:

Inicialmente, vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Observe que,

i) para valores de **x** menores do que −3, os termos x − 1 e x + 3 são **negativos**.

ii) para valores de **x** entre −3 e 1, o termo x − 1 é **negativo**, e o termo x + 3 é **positivo**.

iii) para valores de **x** maiores do que 1, os termos x − 1 e x + 3 são **positivos**.

Assim, podemos representar esse fato no esquema a seguir:

$x < -3$	**−3** $-3 < x < 1$ **1**	$x > 1$
$-(x-1)-(x+3)=14$	$-(x-1)+(x+3)=14$	$x-1+x+3=14$
$-x+1-x-3=14$	$-x+1+x+3=14$	$2x=12$
$-2x=16$	$4=14$	$x=6$
$x=-8$		
(convém)	(absurdo)	(convém)

Devemos verificar também se as raízes −3 e 1 são soluções da equação:

i) Para x = −3, temos 4 = 14. (absurdo)

ii) Para x = 1, temos 4 = 14. (absurdo)

Assim, as soluções são x = −8 ou x = 6.

Portanto, S = {−8, 6}.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação é dita modular quando a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos

1º) Resolver a inequação $|x| > 7$.

Resolução:

Observe que há dois intervalos reais que satisfazem a essa condição: $x < -7$ ou $x > 7$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 7\}$.

2º) Resolver a inequação $|x| < 7$.

Resolução:

Observe que há apenas um intervalo que satisfaz a essa condição: $-7 < x < 7$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$.

Generalizando:

Seja **a** um número real positivo. Há dois casos possíveis:

3º) Resolver a inequação $|3x - 2| \leq 7$.

Resolução:

$-7 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2 \Rightarrow$

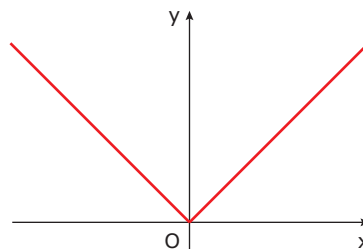
$-5 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq 3$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq x \leq 3\right\}$.

FUNÇÃO MODULAR

É uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Essa função, de acordo com a definição de módulo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Observe que:

Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$.

Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$.

A imagem da função modular é o conjunto $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES MODULARES

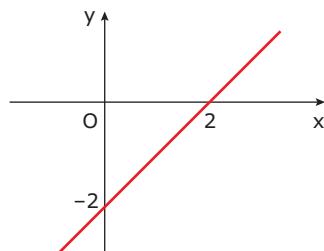
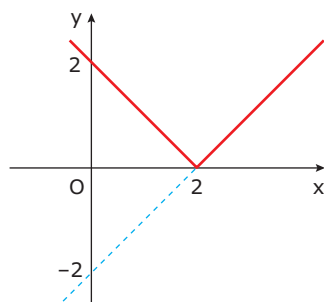
Gráficos de funções da forma $y = |f(x)|$

Esse tipo de gráfico é obtido pela "reflexão" ou "rebatimento", em relação ao eixo **x**, das partes do gráfico nas quais $f(x) < 0$.

Exemplos

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 2|$.

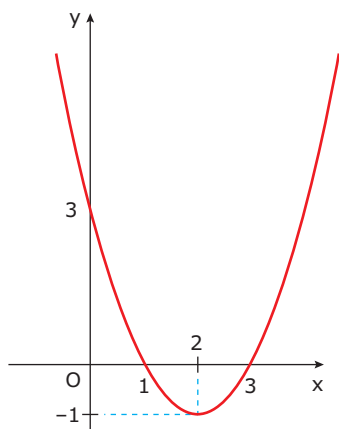
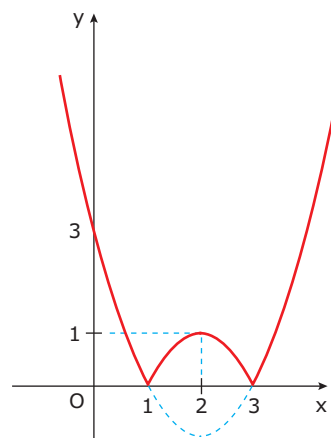
Resolução:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x - 2$.

Agora, basta efetuarmos uma reflexão, em torno do eixo **x**, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.

OBSERVAÇÃO

O gráfico da função básica $y = |x|$ também pode ser obtido por esse processo.

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x^2 - 4x + 3|$.

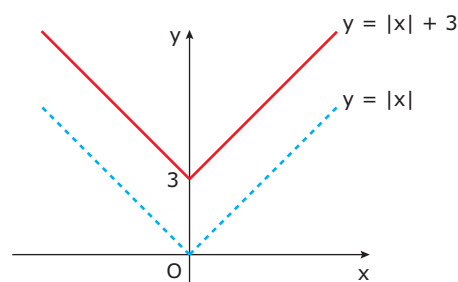
Resolução:

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Efetuando a reflexão em torno do eixo **x**, temos o seguinte gráfico:

Outros gráficos

Exemplos

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x| + 3$.

Resolução:

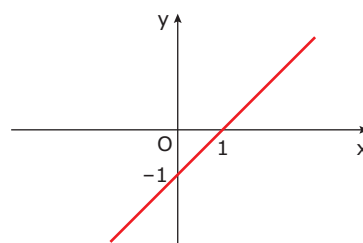
Basta esboçarmos o gráfico da função $y = |x|$ e, em seguida, deslocarmos esse gráfico 3 unidades para cima.

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| - 2$.

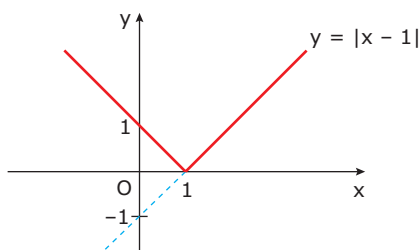
Resolução:

Basta esboçarmos o gráfico da função $y = |x - 1|$ e, em seguida, deslocarmos esse gráfico 2 unidades para baixo.

1º passo: Esboço do gráfico da função $y = |x - 1|$:

Nesse caso, podemos utilizar o "rebatimento" em relação ao eixo **x**, descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de $y = x - 1$.

MATEMÁTICA

Agora, basta efetuarmos uma reflexão em torno do eixo **x**, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.

2º passo: A partir do gráfico da função $y = |x - 1|$ construído anteriormente, promoveremos uma translação do mesmo 2 unidades para baixo. Para isso, é necessário encontrar os pontos de interseção de $y = |x - 1| - 2$ com os eixos ordenados:

- Interseção com o eixo Oy

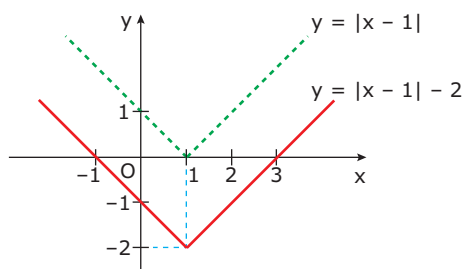
  Fazendo $x = 0 \Rightarrow\ y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$

  $y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$

- Interseção com o eixo Ox

  Fazendo $y = 0 \Rightarrow\ 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$

  $|x - 1| = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ \quad \text{ou} \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \quad \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

3º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| + |x + 2|$.

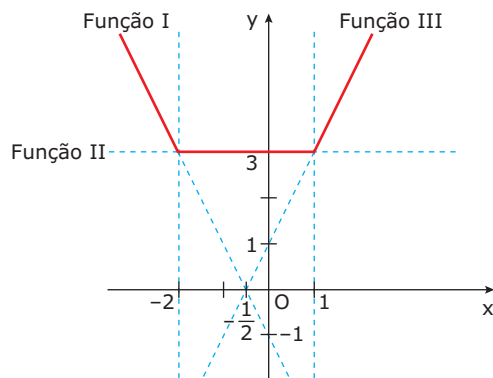
Resolução:

Vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos:

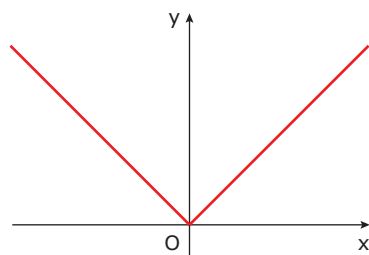
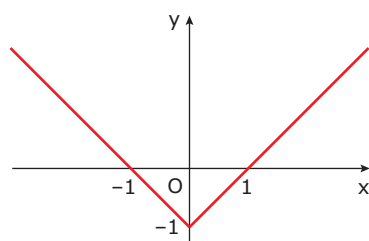
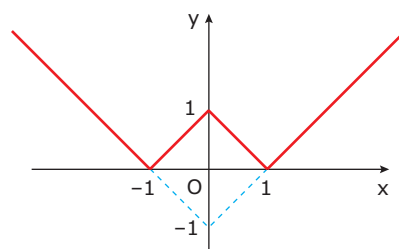
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Logo, podemos usar o seguinte esquema:

$x \le -2$	**−2**	$-2 < x < 1$	**1**	$x \ge 1$
$y = -(x - 1) - (x + 2)$		$y = -(x - 1) + x + 2$		$y = x - 1 + x + 2$
$y = -x + 1 - x - 2$		$y = -x + 1 + x + 2$		$y = 2x + 1$
$y = -2x - 1$		$y = 3$		
(função I)		(função II)		(função III)

Daí, observe que há três funções, uma para cada intervalo de **x**. Representando tais funções em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, temos:

4º) Esboçar o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

Resolução:

Inicialmente, esboçamos o gráfico da função $y = |x|$. Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade para baixo, obtendo o gráfico da função $y = |x| - 1$. Finalmente, "rebatemos", em relação ao eixo **x**, a parte do gráfico com ordenada negativa, obtendo o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UECE) Se $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são

A) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$

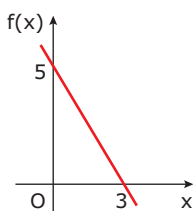
02. (UFLA-MG–2009) Se $y = |x|^2 - 5|x| + 6$, a afirmativa **CORRETA** é

A) **y** se anula somente para quatro valores de **x**.

B) **y** possui apenas um ponto de mínimo.

C) **y** se anula somente para dois valores de **x**.

D) **y** não é uma função par.

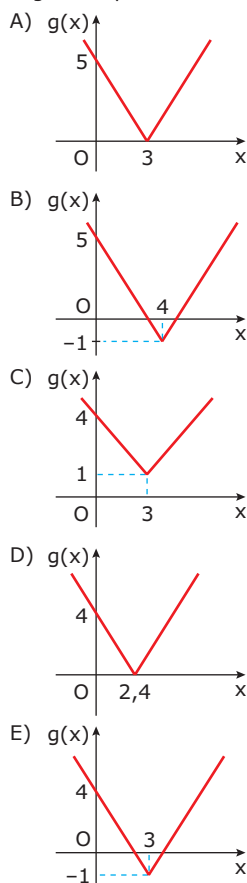
03. (Cesgranrio) No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau f(x).

O gráfico que **MELHOR** representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é

A)

B)

C)

D)

E)

04. O conjunto imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x + 8| + 1$ é o intervalo

A) $[5, +\infty[$

B) $[4, +\infty[$

C) $[3, +\infty[$

D) $[1, +\infty[$

E) $[0, +\infty[$

05. (FGV-SP) A soma dos valores inteiros de **x** que satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geq 1$ é

A) 25

B) 13

C) 16

D) 18

E) 21

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFTM-MG–2007) Dada a desigualdade $1 < |x + 3| < 4$, então a quantidade de valores inteiros não nulos de **x** que satisfaz é

A) 7

B) 6

C) 5

D) 4

E) 3

02. (UEMS) Considerando as funções reais de variável real $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$, tem-se que

A) $(f \circ g)(x) = x - 1$

B) $(f \circ g)(x) = |x - 1|$

C) $(f \circ g)(x) = x$

D) $(f \circ g)(x) = x + 1$

E) $(f \circ g)(x) = |x + 1|$

03. (UFF-RJ) Com relação aos conjuntos $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{7}\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 0{,}333...\}$, afirma-se:

I. $P \cup Q = P$

II. $Q - P = \{0\}$

III. $P \subset Q$

IV. $P \cap Q = Q$

Somente são **VERDADEIRAS** as afirmativas

A) I e III.

B) I e IV.

C) II e III.

D) II e IV.

E) III e IV.

04. (UFJF-MG) Sobre os elementos do conjunto solução da equação $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que

A) são um número natural e um número inteiro.

B) são números naturais.

C) o único elemento é um número natural.

D) um deles é um número racional, o outro é um número irracional.

E) não existem, isto é, o conjunto solução é vazio.

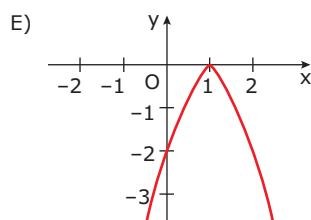
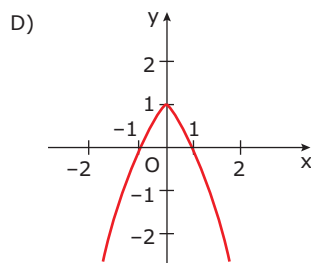
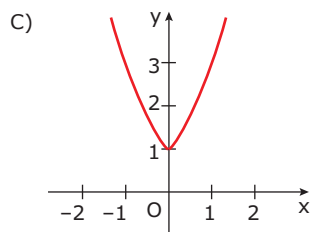
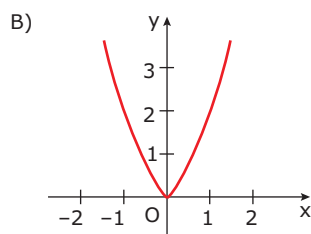
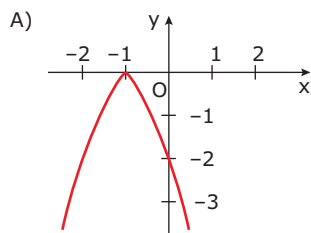
05. (UEL-PR) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x^2| + |x|$. O gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x + 1)$, é

A)

B)

C)

D)

E)

06. (UECE) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 5| < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 4| \geq 1\}$, a soma dos elementos de $A \cap B$ é igual a

A) 19

B) 20

C) 21

D) 22

E) 18

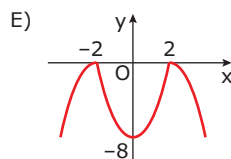
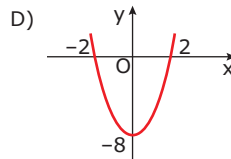
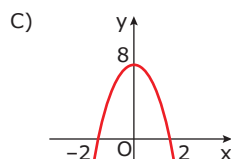
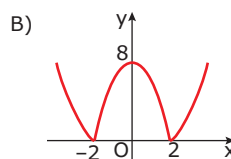
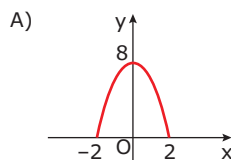
07. (UFMG) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = y = |2x^2 - 8|$. O gráfico de $y = f(x)$ é

A)

B)

C)

D)

E)

08. (UFRGS) Para $-1 < x < \frac{1}{2}$, o gráfico da função $y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincide com o gráfico da função $y = ax + b$. Os valores de **a** e **b** são, respectivamente,

A) -1 e -1

B) 2 e -1

C) -1 e 2

D) $\frac{1}{2}$ e -1

E) $-\frac{1}{2}$ e 1

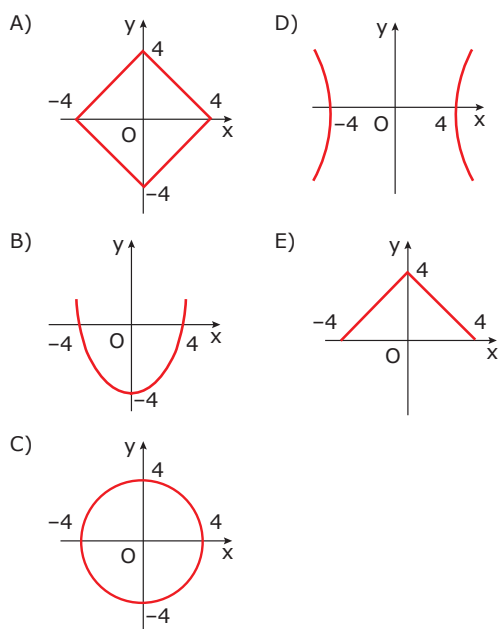
09. (UFLA-MG) O gráfico da expressão $|x| + |y| = 4$ é dado por

A)

D)

B)

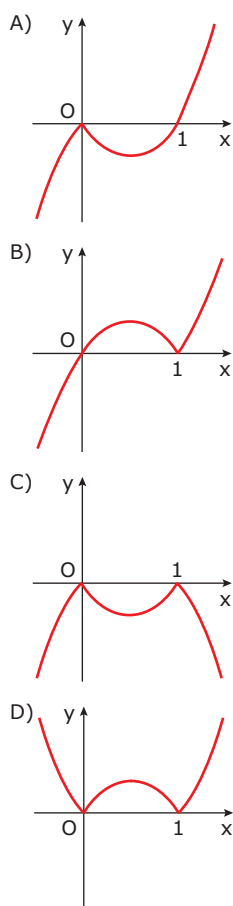
E)

C)

10. (UFMG–2010) Considere a função $f(x) = x|1 - x|$. Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função está **CORRETO.**

A)

B)

C)

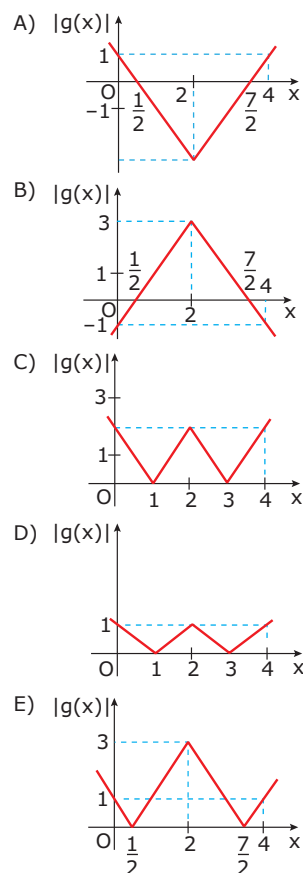
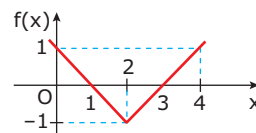
D)

11. (UFCE) Seja **f** uma função real de variável real cujo gráfico está representado a seguir. Se $g(x) = 2.f(x) - 1$, assinale a alternativa cujo gráfico **MELHOR** representa $|g(x)|$.

A)

B)

C)

D)

E)

12. (UFC–2008) Dadas as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na interseção do gráfico de **f** com o gráfico de **g** é igual a

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

13. (ITA-SP) Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que

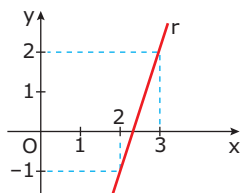
A) a = 1 e b = 6

B) a = 0 e b = –6

C) a = 1 e b = –6

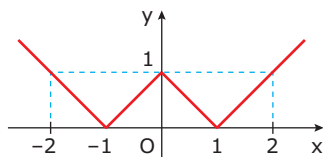
D) a = 0 e b = –9

E) não existem **a** e **b** a menos que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

14. (UFMG) Observe a figura.

A reta **r** é o gráfico de uma função **g**. Seja **f** a função dada por $f(x) = |x - 1|$. Pode-se afirmar que $f(x) \leq g(x)$ tem como conjunto solução

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
D) $\varnothing$
E) $\mathbb{R}$

15. (UFRJ) Seja **f** a função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. **DETERMINE a**, **b** e **c**, sabendo que as raízes da equação $|f(x)| = 12$ são –2, 1, 2 e 5. **JUSTIFIQUE** sua resposta.

16. (UFES)

O gráfico anterior representa a função

A) $f(x) = ||x| - 1|$
B) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$
C) $f(x) = ||x| + 2| - 3$
D) $f(x) = |x - 1|$
E) $f(x) = ||x| + 1| - 2$

SEÇÃO ENEM

01. Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia na resolução de um desafio matemático. O professor forneceu uma série de informações acerca de um número **Y**. A primeira equipe que conseguisse determinar esse número venceria a prova.

As informações eram as seguintes:

- O número **Y** é natural.
- O número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da origem da reta real.

Acerca do número **Y**, podemos concluir que

A) é um número primo.
B) possui 6 divisores naturais.
C) é divisor de 56.
D) é um número ímpar.
E) é múltiplo de 3.

02. A elaboração de um programa de computadores consiste em fornecer uma série de comandos ao computador para que o mesmo execute uma determinada tarefa. Tais comandos devem ser dados em uma linguagem apropriada, chamada linguagem de programação. É comum que um programador, antes de digitar o programa propriamente dito, crie um algoritmo, ou seja, uma espécie de rascunho que contém a sequência de operações que o futuro programa deverá executar. Um programador escreveu em um papel o seguinte algoritmo:

Passo 1) Dados iniciais
x_0: valor de entrada
Passo 2) Faça $x_0 - 1$.
Passo 3) Se $|x_0 - 1| = 6$, então FIM.
Passo 4) Se $|x_0 - 1| \neq 6$, então VOLTE AO PASSO 2, UTILIZANDO $|x_0 - 1|$ COMO DADO DE ENTRADA.

Após a implementação do programa, foram feitos vários testes. Em um desses testes, verificou-se que o passo 2 foi repetido uma única vez, antes de o programa terminar. O número de valores reais possíveis para o dado de entrada x_0, nessas condições, é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

GABARITO

Fixação

01. C 02. A 03. E 04. A 05. E

Propostos

01. E
02. B
03. B
04. A
05. A
06. C
07. B
08. C
09. A
10. B
11. E
12. B
13. D
14. B
15. a = 2
b = –6
c = –8
16. A

Seção Enem

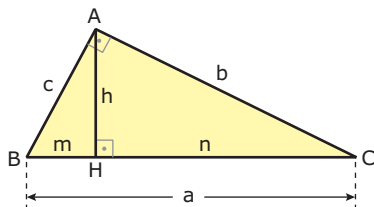
01. C 02. B

MATEMÁTICA

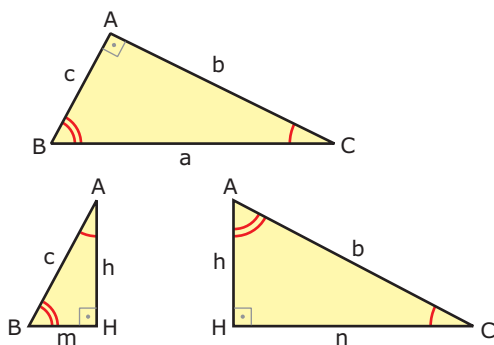
MÓDULO 07 FRENTE D

Triângulo retângulo

INTRODUÇÃO

Considere o triângulo retângulo ABC a seguir:

Em que:

- **b** e **c** são as medidas dos catetos;
- **a** é a medida da hipotenusa;
- **h** é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- **m** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.
- **n** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Pela altura relativa à hipotenusa, separamos o triângulo retângulo em dois outros triângulos semelhantes a ele, como mostrado a seguir:

Pela semelhança entre esses triângulos, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} ah = bc \\ c^2 = am \\ ch = bm \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = an \\ ah = bc \\ bh = cn \end{cases}$$

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow \begin{cases} bh = cn \\ ch = bm \\ h^2 = mn \end{cases}$$

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como n + m = a, concluímos que:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

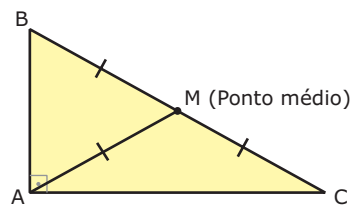
OBSERVAÇÃO

O recíproco Teorema de Pitágoras também é válido, ou seja, se em um triângulo o quadrado de um lado for igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo será retângulo.

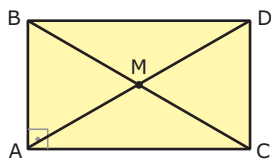
Resumindo as relações encontradas e excluindo as repetidas, vale a pena memorizar as seguintes:

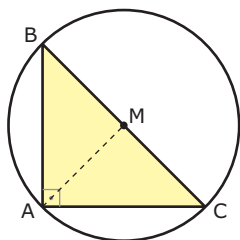
i) $b^2 = an$
ii) $c^2 = am$
iii) $h^2 = mn$
iv) $ah = bc$
v) $a^2 = b^2 + c^2$

MEDIDA DA MEDIANA RELATIVA À HIPOTENUSA

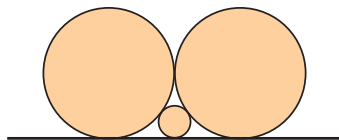
"Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa."

$$AM = \frac{BC}{2}$$

Para provar essa propriedade, construa o retângulo ABDC e suas diagonais. As diagonais de um retângulo são congruentes e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma.

Logo, este é o ponto médio, **M**, da hipotenusa do triângulo ABC:

Como AD = BC e AM = $\frac{AD}{2}$, concluímos que AM = $\frac{BC}{2}$.

Outra maneira de verificar tal propriedade é através da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

Como o ângulo inscrito na circunferência é reto, o arco $\overset{\frown}{BC}$ que ele "enxerga" mede 180º. Portanto, o segmento $\overline{BC}$ é o diâmetro, e o ponto médio **M** é o centro da circunferência. Logo, a medida $\overline{AM}$ é igual ao raio da circunferência, de onde conclui-se que AM = $\frac{BC}{2}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

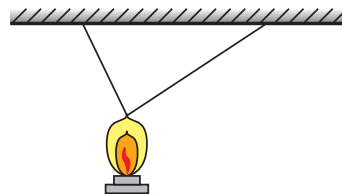
01. (UFMG–2006) Nesta figura, estão representadas três circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta tangente às três circunferências.

Sabe-se que o raio de cada uma das duas circunferências maiores mede 1 cm. Então, é **CORRETO** afirmar que a medida do raio da circunferência menor é

A) $\frac{1}{3}$ cm.

B) $\frac{1}{4}$ cm.

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

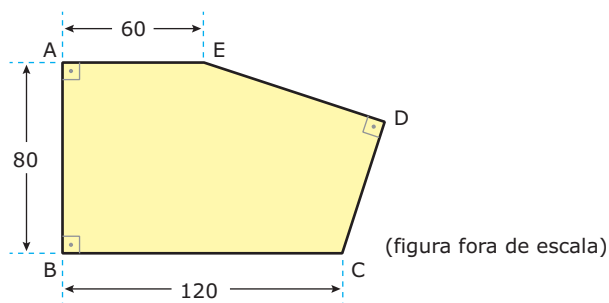
02. (UFRGS) O lampião, representado na figura, está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto é

A) 1,69

B) 1,3

C) 0,6

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{6}{13}$

03. (UFTM-MG–2009) Uma praça tem a forma de um pentágono convexo, mostrado na figura, em que as dimensões estão indicadas em metros.

Existem duas opções para ir do ponto **A** até o ponto **C**, contornando a praça. São elas:

I. Saindo de **A**, pode-se seguir em linha reta até **E**, depois até **D** e, finalmente, encaminhar-se até **C**.

II. Saindo de **A**, pode-se seguir em linha reta até **B** e depois dirigir-se até **C**.

Se, nas duas opções, a distância total a ser percorrida é a mesma e, sendo DE > DC, então a distância entre **D** e **E**, em metros, é igual a

A) 70

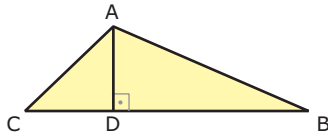
B) 80

C) 90

D) 100

E) 110

04. (FUVEST-SP) Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

05. (FUVEST-SP–2006) Na figura a seguir, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de $\overline{CD}$ é

A) $\frac{17}{12}$

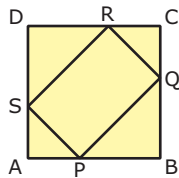
B) $\frac{19}{12}$

C) $\frac{23}{12}$

D) $\frac{25}{12}$

E) $\frac{29}{12}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. O perímetro do quadrilátero PQRS é

A) $11\sqrt{3}$

B) $22\sqrt{3}$

C) $11\sqrt{2}$

D) $22\sqrt{2}$

02. (PUC Minas) Constrói-se um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB}$ e AC = $\frac{1}{2}$AB. O seno do maior ângulo agudo desse triângulo é igual a

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D) $\sqrt{5}$

E) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

03. (PUC Minas) A interseção de duas retas perpendiculares, **r** e **s**, é um ponto **A**. Um ponto **B**, de **r**, está a 3 m de **A** e um ponto **C**, de **s**, está a 4 m de **A**. A distância de **A** à reta $\overleftrightarrow{BC}$, em metros, mede

A) 2,5

B) 2,4

C) 2,3

D) 2,0

E) 1,5

04. (UFU-MG) Num triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ é reto. A altura h_A divide a hipotenusa **a** em dois segmentos **m** e **n** (m > n). Sabendo-se que o cateto **b** é o dobro do cateto **c**, podemos afirmar que $\frac{m}{n}$ é

A) 4

B) 3

C) 2

D) $\frac{7}{2}$

E) 5

05. (UFG) O perímetro de um triângulo isósceles de 3 cm de altura é 18 cm. Os lados deste triângulo, em cm, são

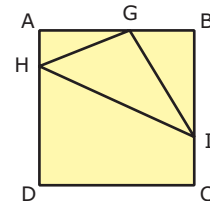
A) 7, 7, 4

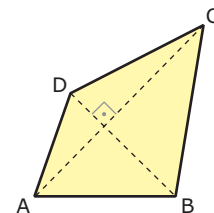
B) 5, 5, 8

C) 6, 6, 6

D) 4, 4, 10

E) 3, 3, 12

06. (Cesgranrio) No quadrado ABCD da figura, tem-se AB = 4, AH = CI = 1 e AG = 2. Então, $\overline{HI}$ mede

A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) $\frac{16}{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{5}$

07. (UEPA) No quadrilátero ABCD a seguir, tem-se AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 6 cm e $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{BD}$. A medida do lado $\overline{AD}$ vale

A) 7 cm.

B) 3 cm.

C) $\sqrt{2}$ cm.

D) $3\sqrt{5}$ cm.

E) $3\sqrt{3}$ cm.

MATEMÁTICA

08. (USS-RJ) Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Então, um dos ângulos agudos do triângulo vale

A) 30° B) 60° C) 45° D) 15° E) 10°

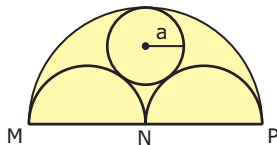
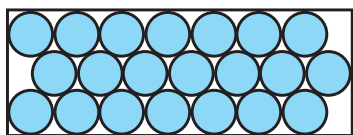
09. (Mackenzie-SP) A circunferência de raio **a** é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Se MN = NP = R, então **a** é igual a

A) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $R\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{3}$

E) $\frac{R}{2}$

10. (FUVEST-SP) A secção transversal de um maço de cigarros é um retângulo que acomoda exatamente os cigarros como na figura. Se o raio dos cigarros é **r**, as dimensões do retângulo são

A) 15r e $2r(1 + \sqrt{3})$

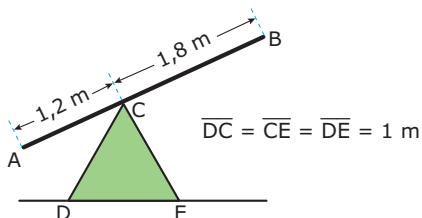
B) 7r e 3r

C) 15r e 6r

D) 15r e 3r

E) $(2 + 3\sqrt{3})r$ e $2r\sqrt{3}$

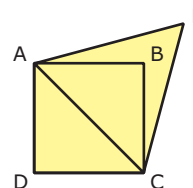
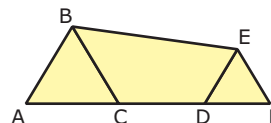
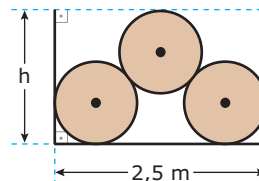
11. (UNESP) Uma gangorra é formada por uma haste rígida $\overline{AB}$, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto **C**, como na figura. Quando a extremidade **B** da haste toca o chão, a altura da extremidade **A** em relação ao chão é

A) $\sqrt{3}$ m.

B) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ m.

C) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ m.

D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ m.

E) $2\sqrt{2}$ m.

12. (UFRJ) Na figura, o triângulo AEC é equilátero, e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. **CALCULE** a distância BE.

13. (UFF-RJ) Na figura a seguir, os triângulos ABC e DEF são equiláteros. Sabendo que $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 6 m, 4 m e 4 m, **CALCULE** a medida de $\overline{BE}$.

14. (FUVEST-SP) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura a seguir. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura **h**, em metros, é

A) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

B) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

C) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

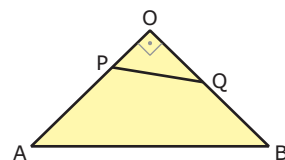
D) $1 + \frac{\sqrt{7}}{3}$

E) $1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$

15. (FUVEST-SP) Em um triângulo retângulo OAB, retângulo em **O**, com OA = a e OB = b, são dados os pontos **P** em $\overline{OA}$ e **Q** em $\overline{OB}$ de tal maneira que AP = PQ = QB = x. Nessas condições, o valor de **x** é

A) $\sqrt{ab} - a - b$

B) $a + b - \sqrt{2ab}$

C) ab

D) $a + b + \sqrt{2ab}$

E) $\sqrt{ab} + a + b$

16. (FCMSC-SP) Seja um triângulo ABC, retângulo em **A**, tal que $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{BC}$ = 50 cm. Se um ponto **D** é marcado no lado $\overline{AC}$, de modo que $\overline{BD} = \overline{DC}$, então o segmento $\overline{DC}$ mede

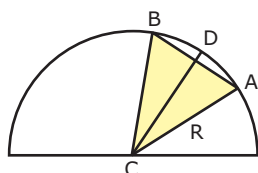
A) 31,25 cm.

B) 32,5 cm.

C) 31,75 cm.

D) 32 cm.

E) 32,25 cm.

17. (FUVEST-SP) Em uma semicircunferência de centro **C** e raio **R**, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja **D** o ponto em que a bissetriz do ângulo $B\hat{C}A$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é

A) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

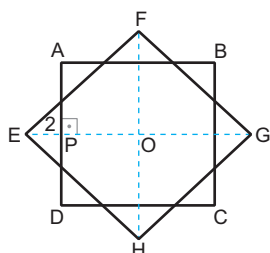
B) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

C) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$

D) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$

E) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

SEÇÃO ENEM

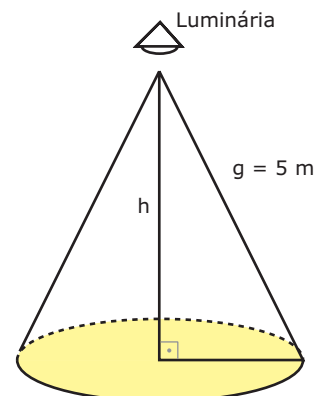
01. Antônio adora soltar pipas. Para confeccionar uma pipa nova, ele faz uma armação com dois quadrados iguais ABCD e EFGH, ambos com lado **a** e centro **O**, conforme a figura. Se EP = 2 cm, então podemos afirmar que o lado **a** do quadrado é, em cm,

A) $4(\sqrt{3} + 1)$

B) $4 + \sqrt{2}$

C) $\sqrt{3} + 2$

D) $2\sqrt{2}$

E) $4(\sqrt{2} + 1)$

02. (Enem–2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando $\pi \cong 3,14$, a altura **h** será igual a

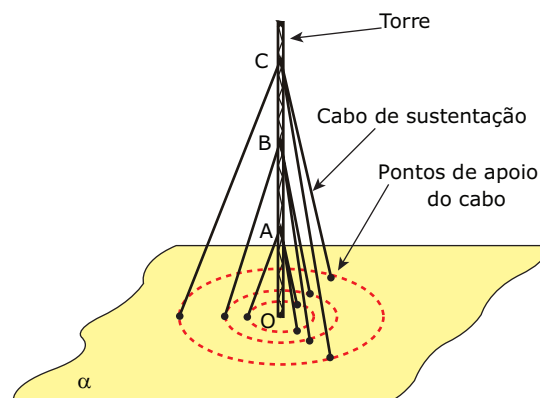
A) 3 m.

B) 4 m.

C) 5 m.

D) 9 m.

E) 16 m.

03. Uma torre de transmissão vertical possui vários cabos de sustentação, conforme ilustração a seguir:

O local de instalação da torre será representado pelo plano **α**, os pontos de apoio dos cabos serão colocados em pontos das circunferências λ_1, λ_2, λ_3, concêntricas e de centro **O**, sendo as medidas dos raios 30 m, 50 m e 90 m, respectivamente. Os pontos de apoio dos cabos serão vértices de um triângulo equilátero, inscrito em cada circunferência. Sabendo-se que OA = AB = BC = 60 m, e que os pontos de apoio que estão sobre uma mesma circunferência são equidistantes um do outro, o valor mínimo de cabo com apoio na circunferência de raio 30 m, em metros, usada na sustentação da torre é

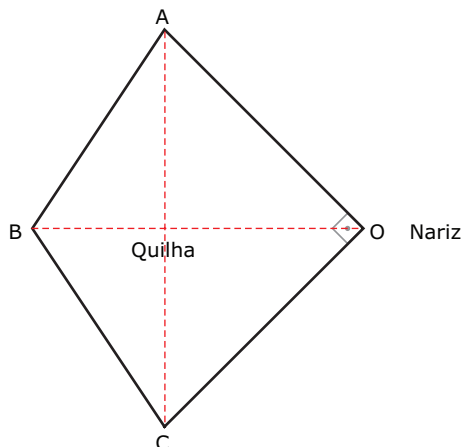
A) $30\sqrt{5}$

B) $55\sqrt{5}$

C) $70\sqrt{5}$

D) $90\sqrt{5}$

E) $120\sqrt{5}$

04. O cálculo da vela de uma asa-delta é importante para a segurança dos praticantes desse esporte. Um dos modelos de asa-delta consiste em dois triângulos isósceles, ΔABC de base AC e ΔAOC de base AC, ligados ao longo da quilha, formando um ângulo de 90º no nariz, conforme a figura a seguir:

Sabendo que OA = OB = OC = a, então o valor do segmento AB é

A) $a.\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

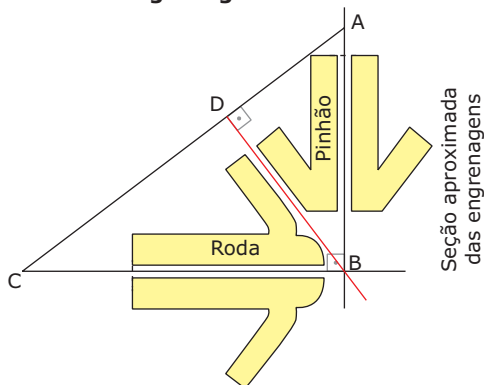
B) $a.\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

C) $a.\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

D) $a.\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

E) $\frac{a}{2}$

05. Na confecção do número de dentes e da profundidade dos sulcos (fresas) das engrenagens, é importante determinar as medidas do triângulo imaginário ABC, como na figura a seguir. Para regulagem das máquinas, é necessário calcular a altura BD do triângulo ABC.

Processo de usinagem para confecção de engrenagens cônicas

Se, nessa engrenagem, AB = 12 cm e BC = 16 cm, a altura BD do triângulo ABC é

A) 9,2 cm.

B) 9,3 cm.

C) 9,4 cm.

D) 9,5 cm.

E) 9,6 cm.

GABARITO

Fixação

01. B
02. E
03. B
04. 1
05. E

Propostos

01. D
02. A
03. B
04. A
05. B
06. E
07. E
08. C
09. D
10. A
11. D
12. BE = $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
13. BE = $2\sqrt{21}$
14. E
15. B
16. A
17. A

Seção Enem

01. E
02. B
03. D
04. A
05. E

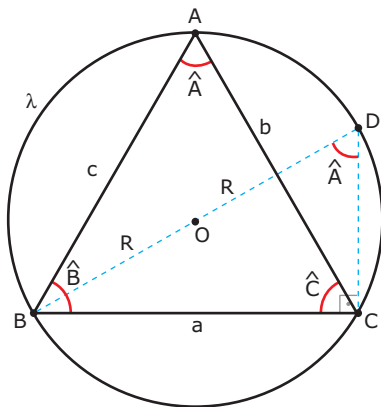
MATEMÁTICA

MÓDULO 08 | FRENTE D

Lei dos senos e lei dos cossenos

LEI DOS SENOS

Considere um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência λ de raio **R**. Traçando o diâmetro BD, temos que o triângulo BCD é retângulo em **C**, pois o ângulo $B\hat{C}D$ "enxerga" um arco de 180º.

O ângulo $\hat{D}$ é congruente ao ângulo $\hat{A}$, pois ambos são inscritos na circunferência e "enxergam" o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$.

Do triângulo BCD, temos que:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analogamente, conclui-se que $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

A Lei dos Senos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, e a constante de proporcionalidade é o dobro do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, ou seja:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares são iguais, isto é:

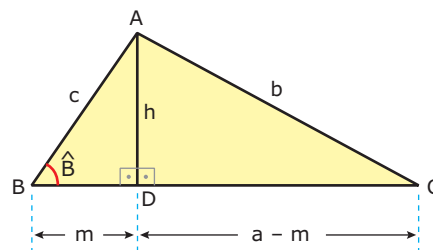
$$\text{sen } (180° - x) = \text{sen } x$$

Por exemplo, sendo x = 60°, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\text{sen } (180° - x) = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

LEI DOS COSSENOS

Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura AD.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos formados, temos:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 \\ b^2 = h^2 + (a - m)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - m^2 & \text{(I)} \\ b^2 = h^2 + (a - m)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2.am$ (III)

Mas, no triângulo ABD, $\cos \hat{B} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c.\cos \hat{B}$. (IV)

Substituindo (IV) em (III):

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.ac.\cos \hat{B}$

Analogamente, conclui-se que $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2.bc.\cos \hat{A} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.ab.\cos \hat{C} \end{cases}$.

A Lei dos Cossenos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\cos (180° - x) = -\cos x$$

Por exemplo, sendo x = 45°, temos:

$\cos x = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

$\cos (180° - x) = \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo, quanto aos seus ângulos, é classificado em acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Sabe-se que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo, e vice-versa. Assim, conhecendo as medidas dos três lados, podemos determinar as medidas dos três ângulos pela Lei dos Cossenos e, portanto, classificar o triângulo.

Seja o triângulo ABC, com lados medindo **a**, **b** e **c**, em que $a \geq b \geq c$.

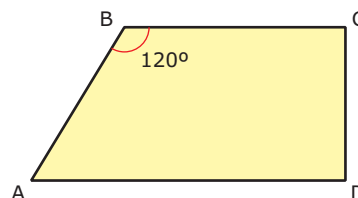
Tem-se três possibilidades quanto à natureza do triângulo ABC:

i) O Δ ABC é acutângulo se, e somente se, $a^2 < b^2 + c^2$.

ii) O Δ ABC é retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$.

iii) O Δ ABC é obtusângulo se, e somente se, $a^2 > b^2 + c^2$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

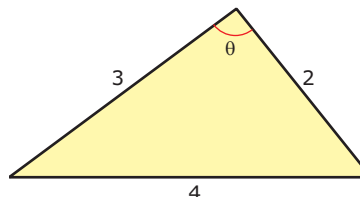
01. (UFMG–2006) Esta figura representa o quadrilátero ABCD.

Sabe-se que AB = 1 cm e AD = 2 cm; o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120°; e o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Então, é **CORRETO** afirmar que o comprimento do segmento $\overline{BD}$ é

A) $\sqrt{3}$ cm.

B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm.

D) $\sqrt{2}$ cm.

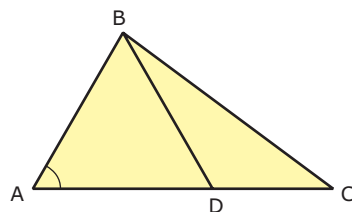
02. (PUC Minas) A Lei dos Cossenos diz o seguinte: o quadrado do lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles. O cosseno do ângulo **θ**, do triângulo da figura, é igual a

A) $-\frac{1}{2}$

B) $-\frac{1}{3}$

C) $-\frac{1}{4}$

D) $-\frac{1}{5}$

E) $-\frac{1}{6}$

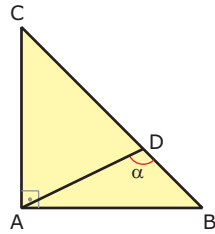
03. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30° e BD = DC, em que **D** é ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$, em cm, é

A) $\sqrt{3}$

B) 2

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{7}$

04. (UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir:

Sabendo-se que α = 120º, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a

A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm.

B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.

C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm.

D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm.

05. (UFJF-MG) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m, e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado desse triângulo mede

A) $2\sqrt{21}$

B) $2\sqrt{31}$

C) $2\sqrt{41}$

D) $2\sqrt{51}$

E) $2\sqrt{61}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Um triângulo **T** tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de **T** é

A) $\frac{5}{6}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{8}$

02. (PUC-SP–2008) Leia com atenção o problema proposto a Calvin na tira seguinte:

O ESTADO DE S. PAULO, 28 abr. 2007.

Supondo que os pontos **A**, **B** e **C** sejam vértices de um triângulo cujo ângulo do vértice **A** mede 60º, então a resposta **CORRETA** que Calvin deveria encontrar para o problema é, em centímetros,

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

B) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

D) $5\sqrt{3}$

E) $10\sqrt{3}$

03. (EESC-SP) Dado o triângulo ABC, tal que AC = 2, BC = $\sqrt{3}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$, temos

A) AB = 3

B) AB = $\sqrt{3}$

C) AB = 2

D) AB= $\sqrt{2}$

E) N.d.a.

04. (PUC-SP) Sejam **a**, **b** e **c** as medidas dos lados de um triângulo ABC. Então, se

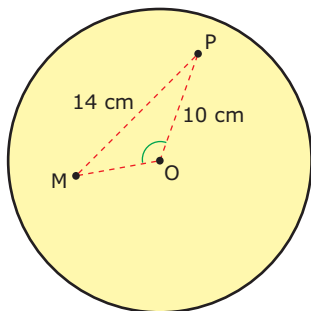
A) $a^2 < b^2 + c^2$, o triângulo ABC é retângulo.

B) $a^2 = b^2 + c^2$, o lado **a** mede a soma das medidas de **b** e **c**.

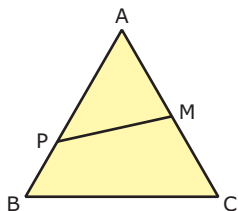
C) $a^2 > b^2 + c^2$, o ângulo oposto ao lado que mede **a** é obtuso.

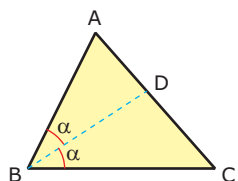
D) $b^2 = a^2 + c^2$, **a** é a hipotenusa, e **b** e **c** são catetos.

E) Nenhuma das anteriores é correta.

05. (UNESP–2009) Paulo e Marta estão brincando de jogar dardos. O alvo é um disco circular de centro **O**. Paulo joga um dardo, que atinge o alvo num ponto que vamos denotar por **P**; em seguida, Marta joga outro dardo, que atinge um ponto denotado por **M**, conforme figura.

Sabendo-se que a distância do ponto **P** ao centro **O** do alvo é $\overline{PO}$ = 10 cm, que a distância de **P** a **M** é PM = 14 cm e que o ângulo $P\hat{O}M$ mede 120º, a distância, em centímetros, do ponto **M** ao centro **O** é

A) 12
B) 9
C) 8
D) 6
E) 5

06. (FUVEST-SP) ABC é equilátero de lado 4; AM = MC = 2, AP = 3 e PB = 1. O perímetro do triângulo APM é

A) $5 + \sqrt{7}$
B) $5 + \sqrt{10}$
C) $5 + \sqrt{19}$
D) $5 + \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$
E) $5 + \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$

07. (UFBA) Na figura a seguir, AB = 3 cm, BC = 4 cm e $\hat{B}$ = 60°. AD é, aproximadamente, igual a

A) 1,2 cm.
B) 1,4 cm.
C) 1,54 cm.
D) 1,8 cm.
E) 2,04 cm.

08. (UFJF-MG–2007) Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC formam um ângulo **α**, tal que cos $\alpha = \frac{1}{3}$. Sabe-se que a medida do lado $\overline{BC}$ é igual a $\sqrt{32}$ cm e que a medida do lado $\overline{AC}$ é o triplo da medida do lado $\overline{AB}$. Sendo **β** o ângulo formado entre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, podemos afirmar que

A) $\beta < 30°$, e a medida do lado $\overline{AB}$ é um inteiro par.
B) $\beta < 30°$, e a medida do lado $\overline{AB}$ é um inteiro ímpar.
C) $30° \leq \beta < 45°$, e a medida do lado $\overline{AB}$ é um inteiro par.
D) $30° \leq \beta < 45°$, e a medida do lado $\overline{AB}$ é um inteiro ímpar.
E) $45° \leq \beta < 60°$, e a medida do lado $\overline{AB}$ é um inteiro par.

09. (Cesesp-PE) "Com três segmentos de comprimentos iguais a 10 cm, 12 cm e 23 cm,

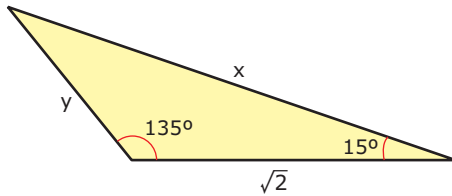
A) é possível formar apenas um triângulo retângulo."
B) é possível formar apenas um triângulo obtusângulo."
C) é possível formar apenas um triângulo acutângulo."
D) não é possível formar um triângulo."
E) é possível formar qualquer um dos triângulos: retângulo, acutângulo ou obtusângulo."

10. (PUC-SP) A diagonal de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um de 60º e outro de 45º. A razão entre os lados menor e maior do paralelogramo é

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. (Cesgranrio) Se 4 cm, 5 cm e 6 cm são as medidas dos lados de um triângulo, então o cosseno do seu menor ângulo vale

A) $\frac{5}{6}$
B) $\frac{4}{5}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{1}{2}$

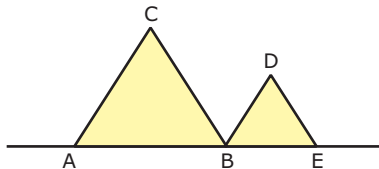
12. (UFG) No triângulo a seguir, os valores de **x** e **y**, nessa ordem, são

A) 2 e $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{3} - 1$ e 2

C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

E) 2 e $\sqrt{3} - 1$

13. (FESP-PR) Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos equiláteros de lados 2a e **a**, respectivamente. Podemos afirmar, então, que o segmento $\overline{CD}$ mede

A) $\frac{5a}{2}$

B) $\frac{3a}{2}$

C) 2a

D) $a\sqrt{2}$

E) $a\sqrt{3}$

14. (UFC) Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ dos triângulos equiláteros ABC e CED medem, respectivamente, 6 m e 3 m. Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ estão numa reta **r**, são consecutivos e $\overline{AD}$ mede 9 m. Se os vértices **B** e **E** estão no mesmo semiplano determinado por **r**, então o perímetro, em metros, do quadrilátero ABED é igual a

A) $3(6 + \sqrt{3})$

B) $3\left(6+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

C) $3\left(7+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D) $3\left(8-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

E) $3\left(7+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15. (FEI-SP) Assinale a alternativa **FALSA** quanto ao tipo de triângulo, dados os lados **a**, **b** e **c**.

A) Se a = 13, b = 5, c = 12, o triângulo é retângulo.

B) Se a = 18, b = 5, c = 12, é um triângulo.

C) Se a = 5, b = 5, c = 5, o triângulo é equilátero.

D) Se a = 5, b = 7, c = 7, o triângulo é isósceles.

E) Se a = 1, b = 2, c = 3, não é triângulo.

16. (ITA-SP) O triângulo ABC, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi}$ cm, cujo ângulo oposto é de 15º. O comprimento da circunferência, em cm, é

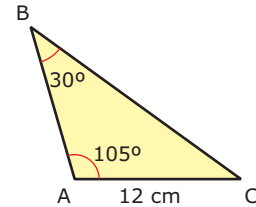
A) $20\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$

B) $40(2 + \sqrt{3})$

C) $80(1 + \sqrt{3})$

D) $10(2\sqrt{3} + 5)$

E) $20(1 + \sqrt{3})$

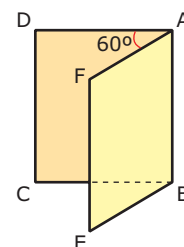
17. (Mackenzie-SP) Três ilhas **A**, **B** e **C** aparecem num mapa, em escala 1:10 000, como na figura. Das alternativas, a que **MELHOR** se aproxima de distância entre as ilhas **A** e **B** é

A) 2,3 km.

B) 2,1 km.

C) 1,9 km.

D) 1,4 km.

E) 1,7 km.

18. (UFPE–2007) Na ilustração a seguir, ABCD e ABEF são retângulos, e o ângulo $D\hat{A}F$ mede 60°. Se $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{30}$, $\overline{BE}$ mede 6 e $\overline{BC}$ mede 10, qual a distância entre os vértices **C** e **F**?

19. (ITA-SP) Num triângulo ABC, BC = 4 cm, o ângulo **C** mede 30° e a projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice **A** mede

A) 1 cm.

B) $\sqrt{2}$ cm.

C) 0,9 cm.

D) $\sqrt{3}$ cm.

E) 2 cm.

20. (Unifor-CE) Um terreno de forma triangular tem frentes de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120º. A medida do terceiro lado do terreno, em metros, é

A) $10\sqrt{5}$

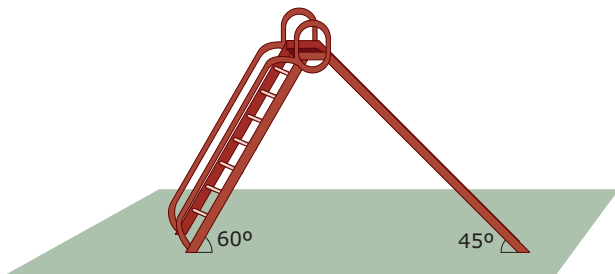
B) $10\sqrt{6}$

C) $10\sqrt{7}$

D) 26

E) $20\sqrt{2}$

SEÇÃO ENEM

01. Em escolas infantis, é comum encontrar um brinquedo, chamado escorregador, constituído de uma superfície plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças deslizam, e de uma escada. No pátio da escolinha Casa Feliz, há um escorregador, apoiado em um piso plano e horizontal, cuja escada tem 8 degraus espaçados de 25 cm e forma um ângulo de 60º com o piso.

O comprimento da rampa, sabendo-se que ela forma com o chão um ângulo de 45º, é de

A) $\sqrt{3}$ m.

B) $\sqrt{6}$ m.

C) $2\sqrt{2}$ m.

D) $2\sqrt{3}$ m.

E) $2\sqrt{6}$ m.

02. Uma empresa ao construir uma linha férrea acaba por deparar-se com uma nascente de água e seu curso será alterado para garantir um custo menor de construção, figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de construção depende da diferença entre a distância efetiva de construção (soma das distâncias dos segmentos AC e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso, em km, é

A) $5(\sqrt{3}-1)$

B) $5(2-\sqrt{3})$

C) $10(\sqrt{3}-1)$

D) $10(2-\sqrt{3})$

E) $10(3-\sqrt{3})$

GABARITO

Fixação

01. A 02. C 03. A 04. A 05. A

Propostos

01. E	11. C
02. C	12. E
03. E	13. E
04. C	14. A
05. D	15. B
06. A	16. A
07. C	17. E
08. A	18. 14
09. D	19. A
10. D	20. C

Seção Enem

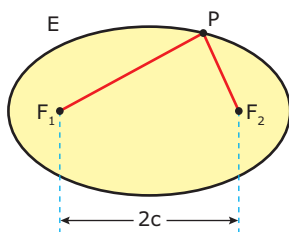
01. B 02. E

MATEMÁTICA

Cônicas

MÓDULO 13 FRENTE E

ELIPSE

Considerem-se, num plano α, dois pontos fixos e distintos F_1 e F_2, e seja 2c a distância entre eles. Uma elipse **E** é o conjunto dos pontos de α, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante 2a maior que 2c.

F_1 e F_2: focos da elipse;

$F_1F_2 = 2c$: distância focal;

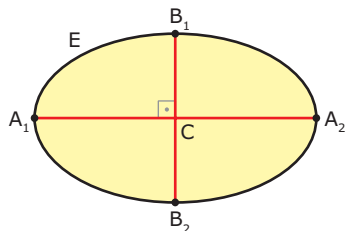
Em símbolos: $P \in E \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$

ELEMENTOS DA ELIPSE

i) A elipse possui dois eixos de simetria A_1A_2 e B_1B_2 perpendiculares em **C**, ponto médio de A_1A_2 e B_1B_2.

A_1A_2 é chamado eixo maior.

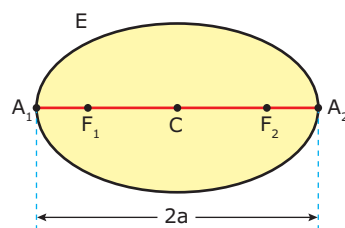
B_1B_2 é chamado eixo menor.

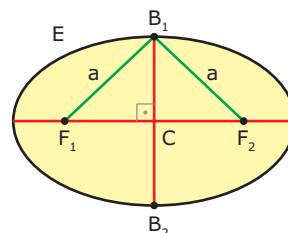
C é chamado centro da elipse.

ii) O eixo maior A_1A_2 tem medida 2a. De fato:

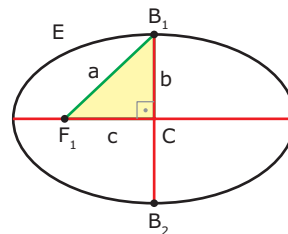
$A_1 \in E \Rightarrow A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$ (1)

Mas, $A_1F_1 = A_2F_2$ (simetria). (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$A_2F_2 + A_1F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$

iii) Os segmentos B_1F_1 e B_1F_2 têm medida **a**. De fato:

$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$

iv) Relação fundamental:

Sendo $B_1B_2 = 2b$, então $B_1C = b$.

Do triângulo CB_1F_1, tem-se:

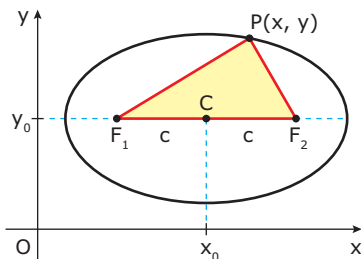
$$a^2 = b^2 + c^2$$

v) Chama-se excentricidade da elipse o número **e**, tal que:

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Serão estudadas as equações das elipses que possuem eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados. Haverá dois casos:

1º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo **x**.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da elipse, tem-se:

$$F_1(x_0 - c, y_0) \text{ e } F_2(x_0 + c, y_0)$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da elipse, pode-se escrever:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

Fazendo-se $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, vem:

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = 2a - \sqrt{(X - c)^2 + Y^2}$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$X^2 + 2Xc + c^2 + Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} + X^2 - 2Xc + c^2 + Y^2$$

Simplificando-se e isolando-se o radical, tem-se:

$$4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 4a^2 - 4Xc$$

Dividindo-se por 4 e elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 - 2Xa^2c + X^2c^2$$

Agrupando-se, tem-se:

$$(a^2 - c^2)X^2 + a^2Y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$, a equação fica:

$$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2$$

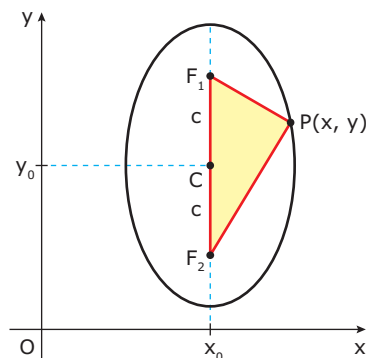
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, tem-se:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo **y**.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da elipse, tem-se:

$$F_1(x_0, y_0 + c) \text{ e } F_2(x_0, y_0 - c)$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da elipse, pode-se escrever:

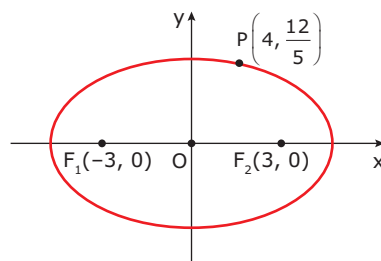
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

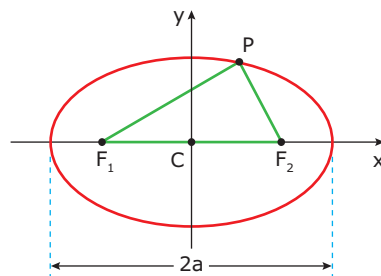
$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Na figura a seguir, o ponto **P** pertence à elipse de focos F_1 e F_2. Dar a equação reduzida da elipse.

Resolução:

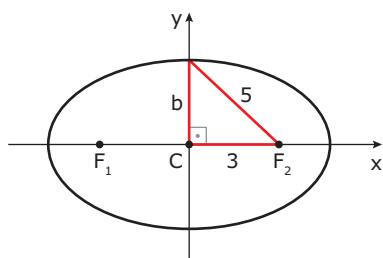
O centro **C** da elipse é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

Logo, C(0, 0).

Sendo 2a a medida do eixo maior, então $2a = PF_1 + PF_2$, ou seja:

$$2a = \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} \Rightarrow$$

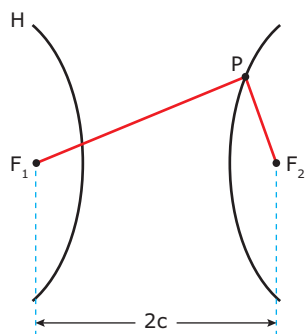
$$2a = \sqrt{49 + \frac{144}{25}} + \sqrt{1 + \frac{144}{25}} \Rightarrow 2a = \frac{37}{5} + \frac{13}{5} \Rightarrow$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

Sendo **b** a medida do semieixo menor, tem-se:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, a equação da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

HIPÉRBOLE

Considerem-se num plano α, dois pontos fixos e distintos F_1 e F_2, e seja 2c a distância entre eles. Uma hipérbole **H** é o conjunto dos pontos de α cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante 2a menor que 2c.

F_1 e F_2: focos da hipérbole.

$F_1F_2 = 2c$: distância focal.

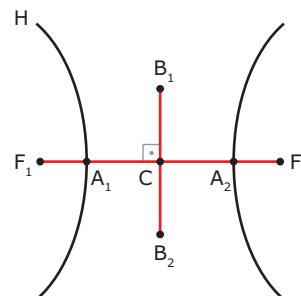
Em símbolos: $P \in H \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$

ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

i) A hipérbole possui dois eixos de simetria A_1A_2 e B_1B_2 perpendiculares em **C**, ponto médio de A_1A_2 e B_1B_2.

A_1A_2 é chamado eixo real (ou transverso).

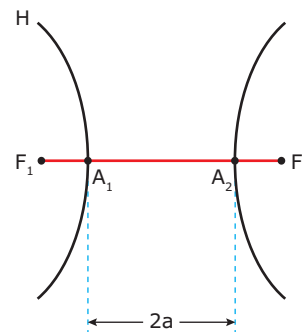
B_1B_2 é chamado eixo imaginário.

C é chamado centro da hipérbole.

ii) O eixo real A_1A_2 tem medida 2a. De fato:

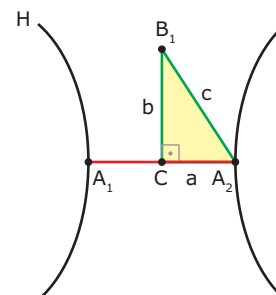
$A_1 \in H \Leftrightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ (1)

Mas, $A_1F_1 = A_2F_2$ (simetria). (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$$A_1F_2 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$$

iii) O ponto B_1 é tal que os segmentos B_1A_1 e B_1A_2 têm medida **c**.

iv) Relação fundamental:

Sendo $B_1B_2 = 2b$, então $B_1C = b$.

Do triângulo CB_1A_2, tem-se:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

MATEMÁTICA

v) Chama-se excentricidade da hipérbole o número **e**, tal que:

$$e = \frac{c}{a} \quad (e > 1)$$

OBSERVAÇÃO

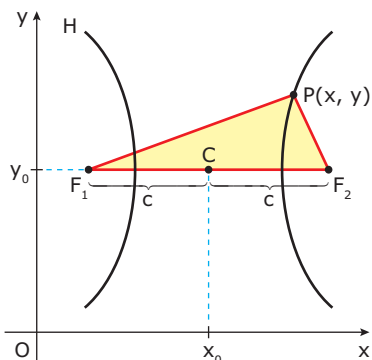
Hipérbole equilátera é aquela em que a = b. Sua excentricidade é $\sqrt{2}$.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

Serão estudadas as equações das hipérboles que possuem eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados. Haverá dois casos:

1º caso: O eixo real é paralelo ao eixo **x**.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, tem-se:

$$F_1(x_0 - c, y_0) \text{ e } F_2(x_0 + c, y_0)$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da hipérbole, pode-se escrever:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2}\right| = 2a$$

Fazendo-se $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, vem:

$$\left|\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} - \sqrt{(X - c)^2 + Y^2}\right| = 2a$$

Eliminando-se o módulo, tem-se:

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = \sqrt{(X - c)^2 + Y^2} \pm 2a$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$X^2 + 2Xc + c^2 + Y^2 = X^2 - 2Xc + c^2 + Y^2 \pm 4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} + 4a^2$$

Simplificando-se e isolando-se o radical:

$$\pm 4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 4a^2 - 4Xc$$

Dividindo-se por 4 e elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 - 2Xa^2c + X^2c^2$$

Agrupando-se, tem-se:

$$(c^2 - a^2)X^2 - a^2Y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Substituindo $c^2 - a^2 = b^2$, tem-se a equação:

$$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2b^2$$

Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

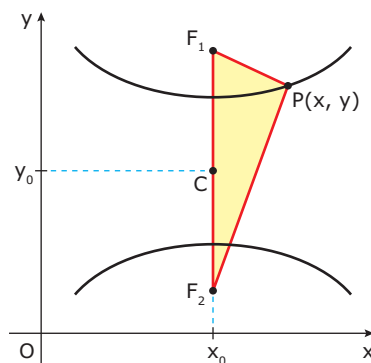
Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, tem-se:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2º caso: O eixo real é paralelo ao eixo **y**.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, tem-se:

$$F_1(x_0, y_0 + c) \text{ e } F_2(x_0, y_0 - c)$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da hipérbole, pode-se escrever:

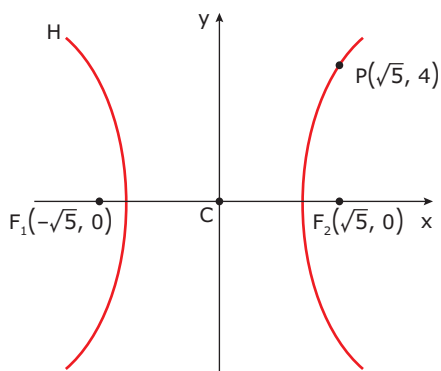
$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso particular: $C(0, 0) \Rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. Na figura a seguir, o ponto **P** pertence à hipérbole de focos F_1 e F_2. Dar a equação reduzida da hipérbole.

Resolução:

O centro **C** da hipérbole é o ponto médio de F_1F_2.

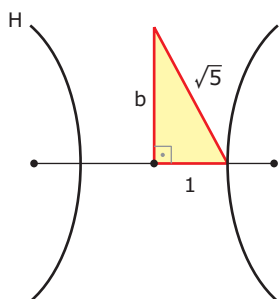
Logo, C(0, 0).

Sendo 2a a medida do eixo real, tem-se $2a = |PF_1 - PF_2|$, ou seja:

$$2a = \left|\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2 + (4-0)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{5})^2 + (4-0)^2}\right| \Rightarrow$$

$$2a = \left|\sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} - \sqrt{0^2 + 4^2}\right| \Rightarrow 2a = \left|\sqrt{36} - \sqrt{16}\right| \Rightarrow$$

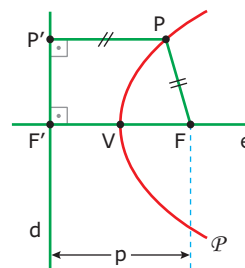
$2a = |6 - 4| \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Sendo **b** a medida do semieixo imaginário, tem-se:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow$

$b^2 = (\sqrt{5})^2 - 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Portanto, a equação da hipérbole é $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

PARÁBOLA

Considerem-se, num plano α, uma reta **d** e um ponto fixo **F** não pertencente a **d**. Uma parábola $\mathcal{P}$ é o conjunto dos pontos de α que equidistam de **F** e **d**.

F: foco da parábola.

d: diretriz da parábola.

Em símbolos: $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow PF = PP'$

ELEMENTOS DA PARÁBOLA

A parábola possui um eixo de simetria **e**, passando por **F** e perpendicular à diretriz **d**.

V é chamado vértice da parábola.

FF' = **p** é chamado parâmetro da parábola.

$FV = VF' = \dfrac{p}{2}$ (pois **V** equidista de **F** e **d**).

EQUAÇÃO REDUZIDA DA PARÁBOLA

Serão estudadas as equações das parábolas que possuem eixos de simetria paralelos a um dos eixos coordenados. Haverá dois casos:

1º caso: O eixo de simetria é paralelo ao eixo **x**.

i) Concavidade para a direita:

Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, tem-se:

$$F\left(x_0 + \frac{p}{2},\ y_0\right) \text{ e } (\mathbf{d})\ x = x_0 - \frac{p}{2}$$

MATEMÁTICA

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, pode-se escrever:

PF = PP', em que $P'\left(x_0 - \frac{p}{2},\ y\right)$, ou seja:

$$\sqrt{\left(x - x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\left(x - x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Fazendo-se $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, vem:

$$\sqrt{\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2} = \sqrt{\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2}$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$X^2 - 2.\frac{p}{2}X + \frac{p^2}{4} + Y^2 = X^2 + 2.\frac{p}{2}X + \frac{p^2}{4}$$

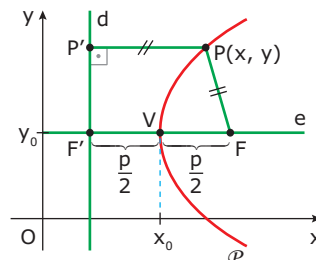
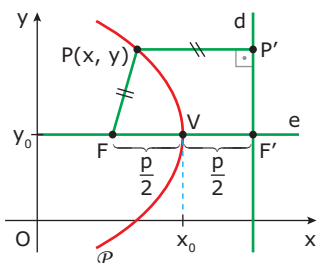
Simplificando, fica:

$$Y^2 = 2pX$$

Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, tem-se:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow y^2 = 2px$

ii) Concavidade para a esquerda:

Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, tem-se:

$$F\left(x_0 - \frac{p}{2},\ y_0\right) \text{ e } (\mathbf{d})\ x = x_0 + \frac{p}{2}$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, pode-se escrever:

PF = PP', em que $P'\left(x_0 + \frac{p}{2},\ y\right)$

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow y^2 = -2px$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Dar a equação reduzida da parábola com vértice (0, 0) e foco (1, 0).

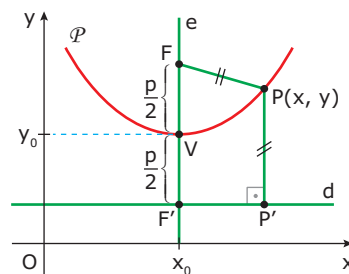
Resolução:

$\frac{p}{2} = d(F, V) = 1 \Rightarrow p = 2$

Como a concavidade é para a direita, temos:

$y^2 = 2.2x \Rightarrow y^2 = 4x$

2º caso: O eixo de simetria é paralelo ao eixo **y**.

i) Concavidade para cima:

Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, tem-se:

$$F\left(x_0,\ y_0 + \frac{p}{2}\right) \text{ e } (\mathbf{d})\ y = y_0 - \frac{p}{2}$$

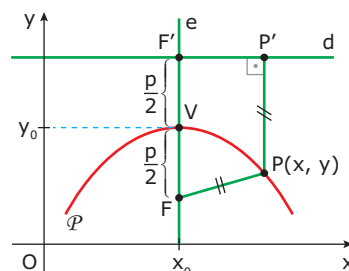
Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, pode-se escrever:

PF = PP', em que $P'\left(x,\ y_0 - \frac{p}{2}\right)$

E, com procedimento análogo ao inicial, chega-se a:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow x^2 = 2py$

ii) Concavidade para baixo:

Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, tem-se:

$$F\left(x_0,\ y_0 - \frac{p}{2}\right) \text{ e } (\mathbf{d})\ y = y_0 + \frac{p}{2}$$

Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola, pode-se escrever:

$$PF = PP', \text{ em que } P'\left(x,\ y_0 + \frac{p}{2}\right)$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chega-se a:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

Caso particular: $V(0, 0) \Rightarrow x^2 = -2py$

04. Dar a equação reduzida da parábola com vértice (0, 0) e foco (0, –2).

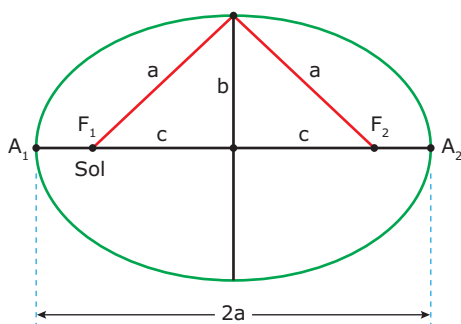
Resolução:

$\frac{p}{2} = d(F, V) = 2 \Rightarrow p = 4$

Como a concavidade é para baixo, temos:

$x^2 = -2.4y \Rightarrow x^2 = -8y$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFTM-MG–2007) Considere um corpo celeste (hipotético) que descreve uma órbita elíptica ao redor do Sol, e que o Sol esteja num foco da elipse. Quando o corpo celeste encontra-se no vértice A_2 da elipse da figura, sua distância ao Sol é de 0,808. Sabendo-se que F_1 e F_2 são os focos da elipse, e que a excentricidade de sua órbita é e = 0,01, então a distância **x** ao Sol, quando o corpo encontra-se no vértice A_1, é igual a

A) 2,203

B) 0,792

C) 0,808

D) 1,616

E) 0,533

02. (UNIRIO-RJ) A área do triângulo PF_1F_2, em que P(2, –8) e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, é igual a

A) 8

B) 20

C) 64

D) 16

E) 32

03. (Cesesp-PE) Dada a elipse de equação $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, assinale a alternativa que nos indica **CORRETAMENTE** as coordenadas do centro, dos focos, as medidas do eixo maior e menor e a distância focal, respectivamente.

A) C(0, 0), F_1(0, –4), F_2(0, 4), 10, 6, 8

B) C(0, 5), F_1(0, 1), F_2(0, 5), 4, 8, 6

C) C(3, 0), F_1(1, 0), F_2(5, 0), 10, 6, 3

D) C(5, 0), F_1(1, 0), F_2(9, 0), 6, 8, 10

E) C(0, 5), F_1(0, 1), F_2(0, 9), 10, 6, 8

04. (UFJF-MG) Considere as afirmativas:

I. As retas de equações $3x - 2y - 5 = 0$ e $3x - 2y = 0$ são paralelas;

II. A equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ representa uma hipérbole;

III. A equação $4y = x^2$ representa uma parábola.

Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) Todas são verdadeiras.

B) Apenas II é falsa.

C) I e II são falsas.

D) II e III são verdadeiras.

E) Todas são falsas.

05. (FUVEST-SP) O lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta y = 0 e da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ é

A) uma reta.

B) uma semirreta.

C) uma circunferência.

D) uma elipse.

E) uma parábola.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UNESP) A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por

A) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$

B) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$

D) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$

E) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

02. (Unicamp-SP) Os valores de $k \in \mathbb{R}$, para que o ponto A(−2, k) pertença à elipse $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$ são

A) $k = 1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

B) $k = 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

C) $k = 3 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $k = 4 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

E) $k = -1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

03. (UFPE) Considere:

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 5\right\}$$

Assinale a **ÚNICA** alternativa que, no plano xy, corresponde ao gráfico de **S**.

A) Uma circunferência de centro em (1, 2).

B) Duas retas perpendiculares.

C) Uma elipse.

D) Uma parábola.

E) Um segmento de reta.

04. (UFC) O número de pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{2} = 1$ é igual a

A) 0

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

05. (AFA-SP) A distância focal da elipse $x^2 + 16y^2 = 4$ é

A) 1

B) 3

C) $\sqrt{15}$

D) $\sqrt{20}$

06. (AFA-SP) Se A(10, 0) e B(−5, y) são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, então o perímetro do triângulo BF_1F_2 mede

A) 24

B) 26

C) 36

D) 38

07. (UFPE) Considere, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Assinale a alternativa que completa **CORRETAMENTE** a sentença: "Os pontos comuns às duas elipses dadas

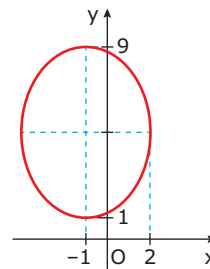
A) determinam apenas as retas y = x ou y = −x."

B) estão sobre a reta y = x."

C) estão sobre a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$."

D) satisfazem a equação $y^2 - x^2 = 0$."

E) determinam um quadrado de lados não paralelos aos eixos coordenados."

08. (AFA-SP) A equação reduzida da cônica, representada no gráfico a seguir, é

A) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

B) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

C) $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

D) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

09. (UFRN) A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$ representa uma

A) circunferência.

B) hipérbole.

C) parábola.

D) elipse.

E) reta.

10. (UFV-MG–2007) Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Considerando a Terra como um ponto na origem do sistema de coordenadas, a equação da órbita do satélite é dada por $9x^2 + 25y^2 - 288x - 1\,296 = 0$, em que **x** e **y** são medidos em milhares de quilômetros. Nessas condições, é **CORRETO** afirmar que

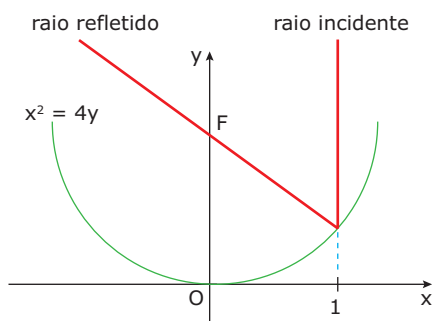
A) a menor distância do satélite à Terra é 16 000 km.

B) a distância do ponto (16, 12) da órbita do satélite à Terra é 28 000 km.

C) a maior distância do satélite à Terra é 36 000 km.

D) a órbita do satélite passa pelo ponto de coordenadas (0, 36).

E) a excentricidade da órbita do satélite é $\frac{3}{4}$.

11. (Unimontes-MG–2006) É um fato bem conhecido que, em um espelho parabólico convexo, todo raio incidente, paralelo ao eixo de simetria, é refletido, passando pelo foco. Um raio incide em uma parábola de equação $x^2 = 4y$, paralelamente ao eixo dos **y**, conforme o desenho.

A equação da reta suporte do raio refletido é

A) $-3y + 4x + 4 = 0$

B) $4x - 3y - 4 = 0$

C) $3x + 4y - 4 = 0$

D) $-4x - 3y - 4 = 0$

12. (AFA-SP–2007) Considere as curvas, dadas pelas equações

(I) $16x^2 + 4y^2 + 128x - 24y + 228 = 0$

(II) $y = 7 - |x|$

(III) $y^2 - 6y - x + 5 = 0$

Analise cada afirmação a seguir, classificando-a em verdadeira ou falsa.

(01) O gráfico de (I) é representado por uma elipse, de (II), por duas retas e de (III), por uma parábola.

(02) O centro de (I) é um ponto de (II) e coincide com o vértice de (III).

(04) A soma das coordenadas do foco de (III) é um número menor que –1.

(08) A excentricidade de (I) é igual a $\cos\frac{\pi}{6}$.

A soma dos itens **VERDADEIROS** é um número do intervalo

A) [8, 11]

B) [4, 7]

C) [12, 15]

D) [1, 3]

13. (Unicamp-SP) Assinale a **ÚNICA** alternativa que corresponde à equação da parábola que tem por foco o ponto F(3, 0) e por diretriz a reta $x + 3 = 0$.

A) $y - 12x^2 = 0$

B) $y^2 - 12x = 0$

C) $y^2 - 9x = 0$

D) $y - 9x^2 = 0$

E) $y^2 + 12x = 0$

14. (UFPE) Um determinado fio é constituído de um material que, quando preso a dois pontos distantes um do outro de 20 m e ambos a 13 m do solo, toma a forma de uma parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3 m do solo. Assinale a alternativa que corresponde à parábola no sistema de coordenadas cartesianas xOy, em que o eixo Oy contém o ponto mais baixo do fio e o eixo Ox está sobre o solo.

A) $y = x^2 + x + 3$

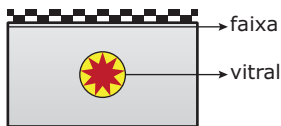
B) $10y = -x^2 + 30$

C) $y = x^2 + 30$

D) $5y = x^2 + 15$

E) $10y = x^2 + 30$

MATEMÁTICA

15. (UFF-RJ) Na parede retangular de um palácio renascentista, há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, uma estreita faixa reta, conforme a figura.

Essa parede foi ornamentada com um elemento decorativo em forma de uma curva, que tem a seguinte característica: cada ponto da curva está situado a igual distância do centro do vitral e da faixa. Pode-se afirmar que o elemento decorativo tem a forma de um arco

A) de elipse.

B) de hipérbole.

C) de parábola.

D) de circunferência.

E) de senoide.

16. (Cesgranrio) Uma montagem comum em laboratórios escolares de Ciências é constituída por um plano inclinado, de altura aproximadamente igual a 40 cm, com 4 canaletas paralelas e apoiado em uma mesa, forrada de feltro, cuja borda é curvilínea. Sobre a mesa, há um ponto marcado no qual se coloca uma bola de gude. A experiência consiste em largar, do alto do plano inclinado, outra bola de gude, a qual, depois de rolar por uma das canaletas, cai na mesa e colide sucessivamente com a borda da mesa e com a primeira bola. A borda da mesa tem a forma de um arco de

A) elipse, e o ponto marcado é um de seus focos.

B) parábola, e o ponto marcado é seu foco.

C) hipérbole, e o ponto marcado é um de seus focos.

D) hipérbole, e o ponto marcado é seu centro.

E) circunferência, e o ponto marcado é seu centro.

17. (Cesesp-PE) Considere a parábola

$$2y - x^2 - 10x + 2 = 0$$

Assinale a **ÚNICA** alternativa que representa as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

A) $\left(-5, -\dfrac{27}{2}\right)$ e $y = 12$

B) $(-5, -13)$ e $y = -14$

C) $(-2, 4)$ e $y = 14$

D) $(-5, -13)$ e $y = 12$

E) $(-5, -13)$ e $y = -12$

18. (EN-RJ) A equação da parábola, cujo foco é o ponto (1, 4) e cuja diretriz é a reta y = 3, é

A) $y = x^2 - 2x + 4$

B) $y = -x^2 + x - 8$

C) $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 4$

D) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + 2$

E) $x = y^2 - y + 4$

19. (AFA-SP) O parâmetro da parábola que passa pelo ponto P(6, 2) e cujo vértice V(3, 0) é o seu ponto de tangência com o eixo das abscissas é

A) $\dfrac{9}{5}$

B) $\dfrac{9}{4}$

C) 3

D) $\dfrac{9}{2}$

20. (UFF-RJ) Uma reta **r** é paralela ao eixo **x** e contém a interseção das parábolas $y = (x - 1)^2$ e $y = (x - 5)^2$. A equação de **r** é

A) $x = 3$

B) $y = 4$

C) $y = 3x$

D) $x = 4y$

E) $y = \dfrac{x}{3}$

GABARITO

Fixação

01. B	02. E	03. E	04. B	05. E

Propostos

01. B	06. C	11. C	16. B
02. A	07. D	12. A	17. B
03. C	08. D	13. B	18. C
04. C	09. D	14. E	19. B
05. C	10. C	15. C	20. B

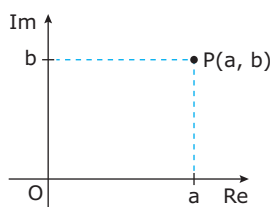
MATEMÁTICA

MÓDULO 14

FRENTE E

Números complexos: forma algébrica

INTRODUÇÃO

Ao resolvermos a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, encontramos $x = 2 \pm \sqrt{-1}$, que não são soluções reais. Euler, em 1777, chamou $\sqrt{-1}$ de **i** (unidade imaginária), e Gauss, em 1800, associou a cada símbolo a + bi o par ordenado (a, b). Esse par recebe o nome de número complexo e é representado por um ponto no plano.

O número complexo (0, 1) é chamado unidade imaginária e será indicado por **i**, ou seja, (0, 1) = i.

Propriedade fundamental

$i^2 = -1$

FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Todo número complexo z = (a, b), com **a** e **b** reais, pode ser escrito na forma z = a + bi, chamada de forma algébrica.

O número real **a** é chamado de parte real de **z** e é indicado por Re (z). O número real **b** é chamado de parte imaginária de **z** e é indicado por Im (z).

Se a parte imaginária de **z** é igual a zero, então **z** é um número real.

z é real ⇔ Im (z) = 0

Se a parte real de **z** é igual a zero e a parte imaginária é não nula, então **z** é um número imaginário puro.

z é imaginário puro ⇔ Re (z) = 0 e Im (z) ≠ 0

POTÊNCIAS DE i COM EXPOENTE NATURAL

Define-se potência de **i** com expoente natural da mesma maneira que se define potência de um número real.

Assim:

$i^0 = 1$	$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$	$i^8 = (i^4)^2 = 1^2 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4.i = 1.i = i$	$i^9 = i^8.i = 1.i = i$
$i^2 = i.i = -1$	$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$	$i^{10} = (i^5)^2 = i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$	$i^7 = i^6.i = -1.i = -i$	$i^{11} = i^{10}.i = -1.i = -i$

No quadro anterior, verificamos que toda potência de **i**, com expoente natural **n**, é igual a um dos quatro valores: 1, i, −1, −i.

Como esse ciclo se repete de quatro em quatro termos, para calcularmos uma potência i^n, procedemos da seguinte maneira: dividimos **n** por 4 e tomamos o resto **r**, fazendo $i^n = i^r$.

Exemplo

Calcular i^{70}.

70 | 4
(2) 17

Assim, $i^{70} = i^2 = -1$.

IGUALDADE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Definição

$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

$\forall \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$

Exemplo

Determinar **a** e **b** reais, de modo que

$(a - b) + 3i = 2 + ai$.

Resolução:

Pela definição de igualdade, tem-se que:

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 3 = a \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

NÚMEROS COMPLEXOS OPOSTOS E CONJUGADOS

Definição de opostos

O oposto de um número complexo $z = a + bi$ é o número indicado por $-z$, tal que $-z = -a - bi$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Assim:

i) O oposto de $z = 1 - i$ é $-z = -1 + i$.

ii) O oposto de $z = -2i$ é $-z = 2i$.

Definição de conjugados

Chama-se conjugado do número complexo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, o número indicado por $\overline{z}$, tal que $\overline{z} = a - bi$.

Assim:

i) O conjugado de $z = 1 - i$ é $\overline{z} = 1 + i$.

ii) O conjugado de $z = -2i$ é $\overline{z} = 2i$.

iii) O conjugado de $z = 3$ é $\overline{z} = 3$.

Propriedades

i) $\overline{\overline{z}} = z$	**v)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
ii) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$	**vi)** $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
iii) $z + \overline{z} = 2 \text{ Re }(z)$	**vii)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(z_2 \neq 0)$
iv) $z - \overline{z} = 2i \text{ Im }(z)$	**viii)** $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$, $n \in \mathbb{N}$

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS E PROPRIEDADES

Adição

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Subtração

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo

Dados os números

$z_1 = 3 + i$, $z_2 = -1 + 4i$, calcular

A) $z_1 + z_2$. **B)** $z_1 - z_2$.

Resolução:

A) $z_1 + z_2 = (3 + i) + (-1 + 4i) = (3 - 1) + (1 + 4)i \Rightarrow$
$z_1 + z_2 = 2 + 5i$

B) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (3 + i) + (1 - 4i) \Rightarrow$
$z_1 - z_2 = (3 + 1) + (1 - 4)i \Rightarrow$
$z_1 - z_2 = 4 - 3i$

Multiplicação

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, aplicando a propriedade distributiva, determinamos $z_1.z_2$.

$z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$

Como $i^2 = -1$, temos:

$z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci - bd \Rightarrow$

$z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo

Dados os números complexos

$z_1 = 3 + i$ e $z_2 = -1 + 4i$, calcular $z_1.z_2$.

Resolução:

$z_1.z_2 = (3 + i).(-1 + 4i) = 3.(-1) + 3.(4i) + i.(-1) + i.(4i) \Rightarrow$

$z_1.z_2 = -3 + 12i - i - 4 \Rightarrow$

$z_1.z_2 = -7 + 11i$

Divisão

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e a divisão $\frac{z_1}{z_2}$, o número **z**, tal que $z = \frac{z_1}{z_2}$ é chamado quociente de z_1 por z_2.

Obtém-se a forma algébrica de **z** do seguinte modo:

i) Toma-se o conjugado de z_2, isto é, $\overline{z}_2 = c - di$.

ii) Multiplicam-se o numerador e o denominador de $\frac{z_1}{z_2}$ por $\overline{z}_2$.

Assim:

$$z = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} \Rightarrow$$

$$z = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

Exemplo

Dados os números complexos

$z_1 = 3 + i$ e $z_2 = -1 + 4i$, calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{-1+4i} = \frac{3+i}{-1+4i} \cdot \frac{-1-4i}{-1-4i} = \frac{-3-12i-i-4i^2}{(-1)^2-4^2i^2} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3-13i+4}{1+16} = \frac{1-13i}{17} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{17} - \frac{13}{17}i$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFV-MG) Seja o número complexo $z = \frac{1+i}{1-i}$, então z^{725} é igual a

A) −1 B) 1 C) 2i D) −i E) i

02. (UFU-MG) Se $S = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2\,003}$, em que $i^2 = -1$, então **S** é igual a

A) 0 B) −1 C) i D) i − 1

03. (UFLA-MG–2006) Determine os valores de **x**, de modo que o número complexo $z = 2 + (x - 4i)(2 + xi)$ seja real.

A) $\pm 2\sqrt{2}$
B) $\pm \frac{1}{3}$
C) ± 2
D) $\pm \sqrt{2}$
E) $\pm \sqrt{3}$

04. (UFRGS) $(1 + i)^{15}$ é igual a

A) 64(1 + i)
B) 128(1 − i)
C) 128(−1 − i)
D) 256(−1 + i)
E) 256(1 + i)

05. (UNIRIO-RJ) Se $\frac{2+i}{1+i} = a + bi$, em que $i = \sqrt{-1}$, então o valor de a + b é

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) −1 E) $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UEL-PR) Sejam os números complexos $w = (x - 1) + 2i$ e $v = 2x + (y - 3)i$, em que $x, y \in \mathbb{R}$. Se w = v, então

A) x + y = 4
B) xy = 5
C) x − y = −4
D) x = 2y
E) y = 2x

02. (Mackenzie-SP) Se u = 4 + 3i e v = 5 − 2i, então uv é

A) 20 − 6i
B) 14 + 7i
C) 26 − 23i
D) 14 − 7i
E) 26 + 7i

03. (UFPA) Qual o valor de **m** para que o produto (2 + mi)(3 + i) seja um imaginário puro?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

04. (PUC-SP) Se $f(z) = z^2 - z + 1$, então f(1 − i) é igual a

A) i
B) −i + 1
C) i − 1
D) i + 1
E) −i

MATEMÁTICA

05. (UFRN) Se $z = 4 + 2i$, então $z - 3\bar{z}$ vale

A) $6 + i$
B) $1 + 8i$
C) $-8 + 8i$
D) $1 - 8i$
E) $12 + 6i$

06. (UFS) Se o número complexo **z** é tal que $z = 3 - 2i$, então $(\bar{z})^2$ é igual a

A) 5
B) $5 - 6i$
C) $5 + 12i$
D) $9 + 4i$
E) $13 + 12i$

07. (UFSM-RS) Sabendo que **x** é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{x+2i}$ é zero, então **x** é

A) −1 B) 1 C) 2 D) −2 E) 4

08. (PUC-SP) Quantos são os números complexos **z** que satisfazem as condições $z^2 = 1$ e $z - \bar{z} = 0$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

09. (PUC-SP) O número complexo **z** que verifica a equação $iz + 2z + i - 1 = 0$ é

A) $-1 + 2i$
B) $-1 + i$
C) $1 - i$
D) $1 + i$
E) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

10. (UFBA) Sendo $z = 2 - i$, o inverso de z^2 é

A) $\frac{5+4i}{41}$
B) $\frac{2+i}{5}$
C) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
D) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$
E) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

11. (PUC Rio) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = \frac{5}{2+i}$. Então,

A) $z = -w$
B) $z = \bar{w}$
C) $z = -\bar{w}$
D) $z = 2w$
E) $z = w$

12. (PUC-SP) O conjugado do número complexo $\frac{1+3i}{2-i}$ é

A) $\frac{-1-7i}{5}$
B) $\frac{1-i}{5}$
C) $\frac{1+2i}{7}$
D) $\frac{-1+7i}{5}$
E) $\frac{1+i}{5}$

13. (UFPR) Dados os números complexos $z_1 = 4 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 1 + 3i$, efetuando $\frac{z_1}{z_2}$, obtemos

A) $-\frac{8\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i$
B) $5 + \sqrt{3}i$
C) $\frac{2+\sqrt{3}}{5} + \frac{(7-\sqrt{3})}{5}i$
D) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10} + \frac{(\sqrt{3}-12)}{10}i$
E) $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8}i$

14. (Mackenzie-SP) Seja o número complexo $z = \frac{1-i}{1+i}$, então $z^{1\,980}$ vale

A) 1 B) −1 C) i D) −i E) −2i

15. (UNESP) Se $z = (2 + i)(1 + i)i$, então o conjugado de **z** será dado por

A) $-3 - i$
B) $1 - 3i$
C) $3 - i$
D) $-3 + i$
E) $3 + i$

GABARITO

Fixação

01. E 02. B 03. A 04. B 05. A

Propostos

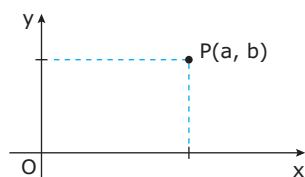
01. A
02. E
03. B
04. E
05. C
06. C
07. E
08. C
09. E
10. D
11. E
12. A
13. D
14. A
15. A

MATEMÁTICA

MÓDULO **15** FRENTE **E**

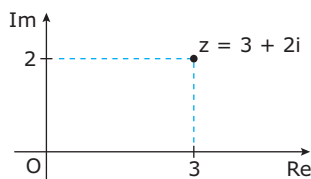
Números complexos: forma trigonométrica

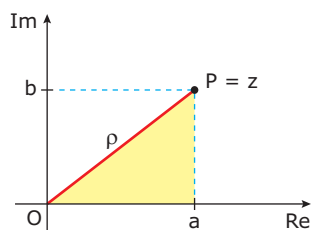
PLANO DE ARGAND-GAUSS

Considere o plano determinado por um sistema de eixos retangulares xOy.

Seja a correspondência biunívoca que associa a cada ponto P(a, b) desse plano o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, em que a abscissa **a** representa a parte real e a ordenada **b,** a parte imaginária de **z**.

Nessas condições, o ponto **P** é chamado afixo do número complexo **z**. Os eixos Ox e Oy são chamados de eixo real (Re) e de eixo imaginário (Im), respectivamente.

Ox = eixo real (Re);
Oy = eixo imaginário (Im);
P = afixo de **z.**

Assim, o número complexo $z = 3 + 2i$ tem afixo (3, 2).

MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considere, no plano de Argand-Gauss, o afixo P(a, b) do número complexo $z = a + bi$, e seja ρ a distância do ponto **P** à origem **O** do sistema.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, tem-se:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Essa distância ρ é chamada módulo de um número complexo e é representada por |z|. Assim, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplos

1º) Calcular o módulo de $z = -5 + 12i$.

Resolução:

Parte real: $a = -5$ e parte imaginária: $b = 12$.

Então, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Portanto, $|z| = 13$.

2º) Calcular o módulo de $z = 3 - 2i$.

Resolução:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Propriedades

Dados os números complexos **z**, z_1 e z_2, tem-se que:

i) $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$	**iv)** $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$	**v)** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$
iii) $z.\overline{z} = |z|^2$	**vi)** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Exemplo

Calcular $|(3 + 4i)(5 - 12i)|$.

Resolução:

Pela propriedade **iv**, tem-se

$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = |3 + 4i|.|5 - 12i| \Rightarrow$

$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = \sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{5^2 + (-12)^2} \Rightarrow$

$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = 5.13 \Rightarrow$

$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = 65$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Dar o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** tais que $|z - 1 + i| \leq 2$.

Resolução:

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

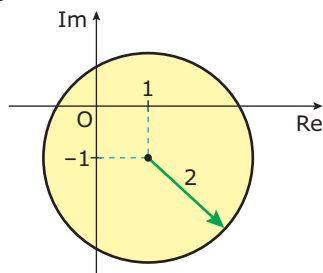
$|z - 1 + i| \leq 2 \Leftrightarrow |a + bi - 1 + i| \leq 2 \Leftrightarrow$

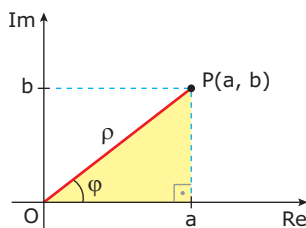
$|a - 1 + (b + 1)i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} \leq 2$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, tem-se:

$(a - 1)^2 + (b + 1)^2 \leq 4$

Resposta:

O lugar geométrico é um círculo de centro (1, −1) e raio 2.

ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, um número complexo não nulo de módulo **ρ**, e seja **P** seu afixo no plano de Argand-Gauss.

O ângulo de medida **φ** determinado por $\overline{OP}$ e pelo semieixo positivo Ox é chamado argumento principal do número complexo **z**. Tem-se, ainda:

i) $\cos \varphi = \dfrac{a}{\rho}$ e **ii)** $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho}$

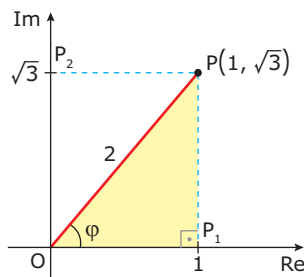
As igualdades (**i**) e (**ii**) garantem a unicidade do argumento principal, pois determinam o quadrante do ângulo **φ**.

Exemplos

1º) Determinar o argumento principal do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Resolução:

No complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, tem-se:

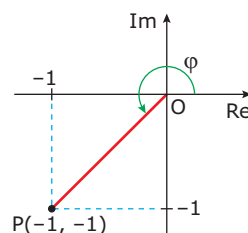
parte real $a = 1$ e parte imaginária $b = \sqrt{3}$

Assim:

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

No triângulo retângulo sombreado, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l}\cos \varphi = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o argumento principal de **z** é $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ou $\varphi = 60°$.

2º) Determinar o argumento principal do número complexo $z = -1 - i$.

Resolução:

O argumento principal de $z = -1 - i$ é $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $\varphi = 225°$.

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$, $z \neq 0$, de módulo **ρ** e argumento **φ**.

Tem-se:

$\cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos \varphi$

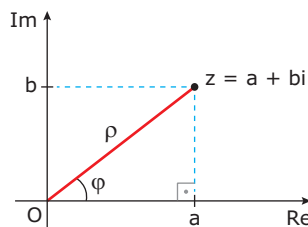
e

$\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \operatorname{sen} \varphi$

Então: $z = a + bi = \rho \cos \varphi + i\rho \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow$

$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

A forma

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

é chamada forma trigonométrica ou forma polar do número complexo **z**.

Exemplo

Escrever sob a forma trigonométrica o número complexo $z = 2\sqrt{3} + 2i$.

Resolução:

A parte real de **z** é $a = 2\sqrt{3}$, e a parte imaginária é $b = 2$. Assim:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \text{ e}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, a forma trigonométrica de **z** é:

$$z = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$

MULTIPLICAÇÃO

Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, tais que $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$.

Tem-se:

$$z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Demonstração:

$z_1.z_2 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1).\rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) =$

$\rho_1.\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) =$

$\rho_1.\rho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_1)] =$

$\rho_1.\rho_2[\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)]$

Exemplo

Sendo $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$, calcular $z_1.z_2$.

Resolução:

$z_1.z_2 = 3.2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow$

$z_1.z_2 = 6(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \Rightarrow$

$z_1.z_2 = 6(-1 + i.0) \Rightarrow$

$z_1.z_2 = -6$

DIVISÃO

Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, tais que $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$.

Tem-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Demonstração:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} =$

$\frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} \cdot \frac{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)} =$

$\frac{\rho_1(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2)}{\rho_2(\cos^2 \varphi_2 + \operatorname{sen}^2 \varphi_2)} =$

$\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_1)] =$

$\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)]$

POTENCIAÇÃO (1ª FÓRMULA DE MOIVRE)

Considere o número complexo não nulo $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. Calculando-se algumas potências de **z**, com expoentes naturais, tem-se:

$z^0 = 1 = \rho^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$z^1 = z = \rho^1(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

$z^2 = z.z = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)$

$z^3 = z^2.z = \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$

$z^4 = z^3.z = \rho^4(\cos 4\varphi + i \operatorname{sen} 4\varphi)$

Pode-se generalizar os resultados anteriores através do seguinte teorema.

Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ um número complexo não nulo e **n** um número inteiro qualquer, tem-se:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\,\text{sen}(n\varphi)]$$

Exemplo

Dado $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, calcular z^4.

Resolução:

$z^4 = 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$z^4 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$z^4 = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow$

$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

RADICIAÇÃO

Sejam **z** um número complexo e **n** um número natural não nulo. Um número complexo **φ** é uma raiz enésima de **z** se, e somente se, $\varphi^n = z$.

Exemplos

1º) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$.

2º) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$.

OBSERVAÇÕES

i) Um número complexo não nulo admite como raízes enésimas **n** números distintos. Por exemplo, o número 1 admite como raízes cúbicas os três números:

$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 1

ii) Só se usa o símbolo $\sqrt[n]{\ }$ para indicar raiz real de um número real. Para indicar as raízes enésimas de um número complexo **z**, deve-se escrever por extenso "raízes enésimas de **z**".

Exemplo

Determinar as raízes quadradas de −9.

Resolução:

Seja a + bi, com **a** e **b** reais, uma raiz quadrada de −9.

Assim, por definição, deve-se ter:

$(a + bi)^2 = -9 \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = -9 \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = -9 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -9 & \text{(I)} \\ ab = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos a = 0 ou b = 0.

Substituindo b = 0 em (I), obtemos $a^2 = -9$.

Como, por hipótese, **a** é real, concluímos que não existe **a**, tal que $a^2 = -9$.

Substituindo a = 0 em (I), obtemos:

$-b^2 = -9 \Rightarrow b = \pm 3$

Logo, as raízes quadradas de −9 são números da forma a + bi com a = 0 e b = ±3, isto é, são os números 3i e −3i.

Resposta: −3i, 3i

2ª FÓRMULA DE MOIVRE

Dado o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, não nulo, e o número natural $n \geq 2$, existem **n** raízes enésimas de **z**.

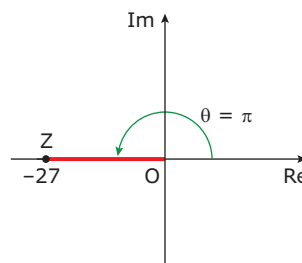
Uma das raízes enésimas de **z** é $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)$.

As demais raízes terão mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$, e seus argumentos formarão, com o argumento de z_0, uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Exemplo

Calcular as raízes cúbicas de −27.

Resolução:

$z = -27 \Leftrightarrow z = 27(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

São três as raízes cúbicas de −27.

Uma raiz é $z_0 = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Chamando as outras duas raízes de z_1 e z_2, temos:

$\rho_1 = \rho_2 = 3$ e $\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ e

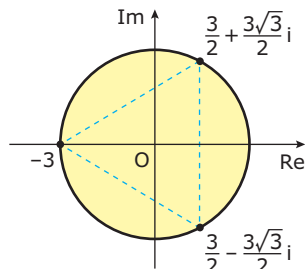
$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3} = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Então:

$z_1 = 3(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) \Rightarrow z_1 = -3$

$z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Representação geométrica

Os afixos das raízes cúbicas de −27 dividem a circunferência, de centro **O** e raio 3, em três partes congruentes, isto é, são vértices de um triângulo equilátero.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM $\mathbb{C}$

Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $z^2 - iz + 2 = 0$.

Resolução:

Temos $a = 1$, $b = -i$ e $c = 2$.

Logo, $\Delta = (-i)^2 - 4.1.2 = -1 - 8 = -9$.

As raízes quadradas de $\Delta = -9$ são 3i e −3i; logo:

$z_1 = \frac{-(-i)+3i}{2} = 2i$ ou $z_2 = \frac{-(-i)-3i}{2} = -i$

Portanto, S = {−i, 2i}.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Mackenzie-SP) A forma trigonométrica do número complexo $i - \sqrt{3}$ é

A) $2.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

B) $2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

C) $2.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

D) $2.\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

E) $2.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

02. (UEL-PR) A potência $(\cos 60° + i.\text{sen } 60°)^{601}$ é igual a

A) $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$

B) $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

C) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

D) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

E) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$

03. (UFSM-RS–2006) Dado $z = x + yi$, um número complexo, as soluções da equação $|z - 2i| = 5$ são representadas graficamente por

A) uma reta que passa pela origem.

B) uma circunferência com centro (0, 2) e raio 5.

C) uma reta que passa por (0, 2).

D) uma circunferência com centro (2, 0) e raio 5.

E) uma reta que passa por (2, 0).

04. (UNIRIO-RJ) Seja o complexo $z = \rho.(\cos\theta + i.\text{sen }\theta)$ escrito na forma trigonométrica. Então, $z.\overline{z}$ é

A) 2ρ

B) $2\rho.(\cos 2\theta - i.\text{sen } 2\theta)$

C) ρ^2

D) $\rho^2.(\cos\theta^2 + i.\text{sen }\theta^2)$

E) $\cos^2\theta + i.\text{sen}^2\theta$

05. (UFU-MG) As representações gráficas dos números complexos $z_1 = \cos 30° + i.\text{sen } 30°$ e $z_2 = \cos 102° + i.\text{sen } 102°$, no plano complexo, correspondem a vértices consecutivos de um polígono regular inscrito em uma circunferência com centro na origem. O número de lados desse polígono é igual a

A) 12

B) 6

C) 5

D) 10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFC–2007) Ao dividir $(1 - \sqrt{3}i)$ por $(-1 + i)$, obtém-se um complexo de argumento igual a

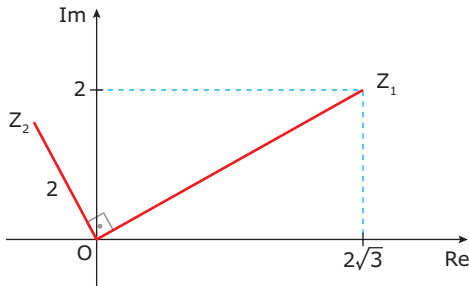
A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{5\pi}{12}$

C) $\frac{7\pi}{12}$

D) $\frac{3\pi}{4}$

E) $\frac{11\pi}{12}$

02. (FGV-SP–2007) A figura indica a representação dos números Z_1 e Z_2 no plano complexo.

Se $Z_1.Z_2 = a + bi$, então a + b é igual a

A) $4(1 - \sqrt{3})$

B) $2(\sqrt{3} - 1)$

C) $2(1 + \sqrt{3})$

D) $8(\sqrt{3} - 1)$

E) $4(\sqrt{3} + 1)$

03. (UFRGS) O ângulo formado pelas representações geométricas dos números complexos $z = \sqrt{3} + i$ e z^4 é

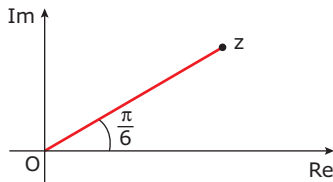
A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{2}$

E) π

04. (UFPE) Considere o seguinte gráfico que representa o número complexo z = a + bi.

Sabendo-se que o segmento $\overline{OZ}$ mede duas unidades de comprimento, assinale a alternativa **CORRETA**.

A) $z = \sqrt{2} + i$

B) $z = \sqrt{3} + i$

C) $z = 1 + \sqrt{3}i$

D) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

E) $z = 1 - \sqrt{3}i$

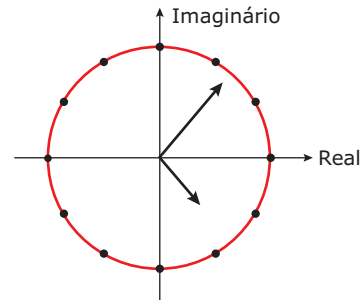
05. (UEG–2006) O conjunto dos números complexos que satisfazem a condição $|z - 3i| = |z - 2|$ é representado no plano cartesiano por uma reta

A) cuja inclinação é positiva.

B) que contém a origem do sistema.

C) que não intercepta o eixo real.

D) cuja inclinação é negativa.

06. (FGV-SP) Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura.

Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11h55min sua ponta estará sobre qual número complexo?

A) $-1 + \sqrt{3}i$

B) $1 + \sqrt{3}i$

C) $1 - \sqrt{3}i$

D) $\sqrt{3} - i$

E) $\sqrt{3} + i$

07. (FUVEST-SP) Entre os números complexos z = a + bi, não nulos, que têm argumento igual a $\frac{\pi}{4}$, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é

A) $1 + i$

B) $1 - i$

C) $-1 + i$

D) $\sqrt{2} + 2i$

E) $-\sqrt{2} + 2i$

08. (Cesgranrio) O conjunto dos pontos z = x + yi do plano complexo que satisfazem $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geq 2$ é

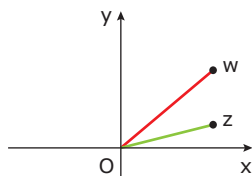
A) o conjunto vazio.

B) uma região não limitada do plano.

C) todos os pontos x + yi tais que $y \geq 2$.

D) uma reta.

E) diferente dos quatro anteriores.

09. (Cesgranrio-RJ) A representação geométrica dos números complexos **z** e **w** é a da figura.

A representação geométrica **POSSÍVEL** para o produto zw é

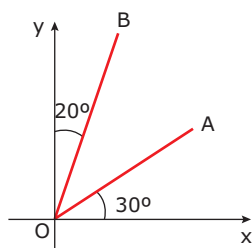
A)

B)

C)

D)

E)

10. (UFU-MG) Sejam z_1 e z_2 dois números complexos representados geometricamente, na figura a seguir, pelos pontos **A** e **B**, respectivamente.

Sabendo-se que OA = 3 cm e que OB = 6 cm, pode-se afirmar que

A) $\frac{z_2}{z_1}$ tem módulo igual a 2 cm.

B) $z_1 + z_2$ tem módulo igual a 9 cm.

C) O argumento de $z_2 - z_1$ é igual a 40°.

D) O argumento de $z_2.z_1$ é igual a 50°.

11. (Mackenzie-SP) Seja t = 2 + 3i um número complexo. Se,

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leq 1\}$

$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi \text{ e } b \leq 3\}$

então, no plano de Argand-Gauss, $A \cap B$ é

A) um conjunto vazio.

B) uma semicircunferência.

C) um semicírculo.

D) uma circunferência.

E) um círculo.

12. (Cesgranrio) No plano complexo, o conjunto dos pontos $z = x + yi$, tais que $|z| \leq 1$ e $y \geq 0$, é

A) uma circunferência.

B) um círculo.

C) um quadrado centrado na origem.

D) um semicírculo.

E) um segmento de reta.

13. (PUC Minas) A forma trigonométrica do número complexo $y = 4\sqrt{3} + 4i$ é

A) 8.(cos 30° + i.sen 30°)

B) 8.(cos 45° + i.sen 45°)

C) 8.(cos 60° + i.sen 60°)

D) 8.(cos 120° + i.sen 120°)

E) 8.(cos 150° + i.sen 150°)

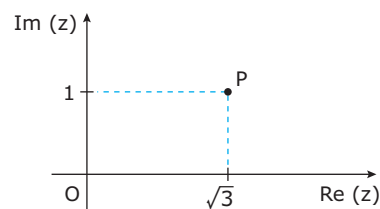
14. (UEBA) Na figura a seguir, o ponto **P** é o afixo do número complexo **z**.

A forma trigonométrica de z^2 é

A) 4.(cos 15° + i.sen 15°)

B) 4.(cos 60° + i.sen 60°)

C) 2.(cos 60° + i.sen 60°)

D) 2.(cos 30° + i.sen 30°)

E) cos 15° + i.sen 15°

15. (UEL-PR) Sejam z_1 e z_2 os números complexos $z_1 = 3.(\cos 30° + i.\text{sen } 30°)$ e $z_2 = 5.(\cos 45° + i.\text{sen } 45°)$. O produto de z_1 por z_2 é o número complexo

A) 15.(cos 1 350º + i.sen 1 350º)

B) 8.(cos 75º + i.sen 75º)

C) 8.(cos 1 350º + i.sen 1 350º)

D) 15.(cos 15º + i.sen 15º)

E) 15.(cos 75º + i.sen 75º)

16. (UNIFESP–2007) Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é

A) $2 + 3i$

B) $3 + \frac{11}{2}i$

C) $3 + 5i$

D) $2 + \frac{11}{2}i$

E) $4 + 5i$

17. (FUVEST-SP) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, qual é o **MENOR** valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

18. (PUC-Campinas-SP) O módulo e o argumento do complexo $(\sqrt{3} + i)^8$ são, respectivamente,

A) 4^4 e $\frac{4\pi}{3}$

B) 2^8 e $\frac{8\pi}{3}$

C) 4^8 e $\frac{8\pi}{9}$

D) 3^8 e $\frac{5\pi}{4}$

E) N.d.a.

19. (Unifor-CE–2007) Seja o número complexo $z = x + 3i$, em que **x** é um número real negativo. Se $|z| = 6$, então a forma trigonométrica de **z** é

A) $6.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

B) $6.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

C) $6.\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

D) $6.\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

E) $6.\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$

20. (Cesgranrio) Seja $w = a + bi$ um complexo, em que $a > 0$ e $b > 0$, e seja $\overline{w}$ o seu conjugado. A área do quadrilátero de vértices **w**, $\overline{w}$, $-w$ e $-\overline{w}$ é

A) $a^2 + b^2$

B) $4b\sqrt{ab}$

C) $4ab$

D) $4\left(\frac{a+b}{3}\right)^2$

E) $(a + b)^2$

GABARITO

Fixação

01. E
02. C
03. B
04. C
05. C

Propostos

01. E
02. A
03. D
04. B
05. A
06. A
07. A
08. A
09. D
10. D
11. C
12. D
13. A
14. B
15. E
16. B
17. C
18. A
19. B
20. C

MATEMÁTICA

Estatística

MÓDULO 16 FRENTE E

INTRODUÇÃO

A Estatística, objeto de estudo deste módulo, é a área da Matemática que tem por objetivo coletar, organizar, analisar e interpretar dados experimentais. Os conceitos estatísticos têm influenciado largamente a maioria dos ramos do conhecimento humano, seja para determinar índices de inflação, ou desemprego, comumente divulgados, seja para fornecer informações à Medicina que possibilitem combater uma determinada doença.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Após um levantamento estatístico, os dados coletados podem ser organizados em uma tabela ou em um gráfico de distribuição de frequências. São mais utilizados os gráficos de barras, de colunas ou de setores.

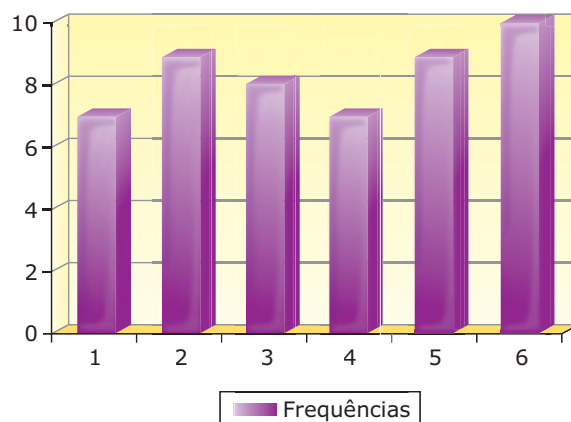
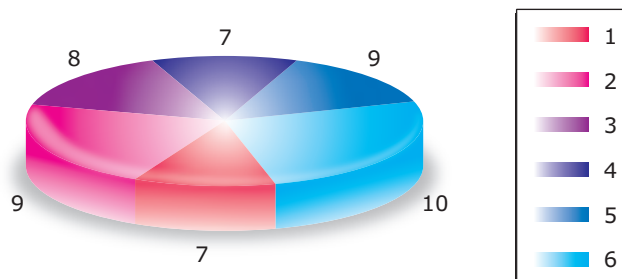
Exemplo

Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela e os gráficos a seguir mostram os seis resultados possíveis e as suas respectivas frequências de ocorrências.

Tabela:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	7	9	8	7	9	10
Frequência relativa	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{10}{50}$

Como mostrado na tabela anterior, a frequência relativa é obtida dividindo-se a freqência absoluta pelo total de observações. Por exemplo, o resultado 6 apareceu em 10 das 50 repetições, portanto sua frequência relativa é $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ ou 0,2 ou 20%.

Gráficos:

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Média aritmética

Dados **n** elementos, calculamos a média aritmética dividindo a soma desses elementos pela quantidade **n**.

Mediana

Mediana é o valor que ocupa a posição central em um conjunto ordenado. Se o número de elementos do conjunto for par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Moda

É o valor que apresenta maior frequência em um conjunto (aparece um maior número de vezes).

Exemplo

Calcular a média aritmética, a mediana e a moda da seguinte distribuição de notas de uma turma.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota	4,0	7,0	5,0	8,0	7,5	10	6,5	8,0	6,5	5,5

Resolução:

Pela definição, a média aritmética A das notas é dada por:

$$A = \frac{4+7+5+8+7,5+10+6,5+8+6,5+5,5}{10} \Rightarrow$$

$A = 6,8$

O conjunto ordenado **C** das notas dos alunos é:

$$C = \{4,0;\ 5,0;\ 5,5;\ 6,5;\ \overbrace{6,5;\ 7,0}^{\text{termos centrais}};\ 7,5;\ 8,0;\ 8,0;\ 10\}$$

Como o número de elementos é par, então a mediana **m** das notas é:

$$m = \frac{6,5+7,0}{2} \Rightarrow m = 6,75$$

As modas das notas são 6,5 e 8,0, pois esses valores aparecem com maior frequência que os demais.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Fornecem informações a respeito da concentração dos valores estudados em torno das medidas de tendência central.

Amplitude

É a diferença entre o maior e o menor valores de um dado conjunto.

Desvio

É a diferença entre um valor qualquer e a média aritmética do conjunto.

$$d_i = x_i - A$$

Variância

É a média aritmética dos quadrados dos desvios.

$$V = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2}{n}$$

Desvio padrão

É a raiz quadrada da variância.

$$\sigma_i = \sqrt{V}$$

Exemplo

Sobre a distribuição dos lucros de uma empresa nos quatro primeiros meses, representada na tabela a seguir, calcular

A) a amplitude.

B) os desvios de cada mês.

C) a variância.

D) o desvio padrão.

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Lucro (R$)	10 000	30 000	90 000	30 000

Resolução:

Pelas definições:

A) A amplitude **a** é dada por:

$a = 90\ 000 - 10\ 000 = 80\ 000$ reais

B) Para calcularmos o desvio, precisamos antes calcular a média aritmética A dos lucros.

$$A = \frac{10\ 000 + 30\ 000 + 90\ 000 + 30\ 000}{4} \Rightarrow$$

$A = 40\ 000$

Assim, os devios d_J, d_F d_M e d_A são dados por:

$d_J = 10\ 000 - 40\ 000 = -30\ 000$ reais

$d_F = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

$d_M = 90\ 000 - 40\ 000 = 50\ 000$ reais

$d_A = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

C) A variância **V** é dada por:

$$V = \frac{(-30\ 000)^2 + (-10\ 000)^2 + (50\ 000)^2 + (-10\ 000)^2}{4} \Rightarrow$$

$V = 900\ 000\ 000$ reais ao quadrado

D) O desvio padrão **σ** é dado por:

$\sigma = \sqrt{900\ 000\ 000} = 30\ 000$ reais

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFJF-MG) Um professor de Física aplicou uma prova, valendo 100 pontos, em seus 22 alunos e obteve, como resultado, a distribuição das notas vista no quadro seguinte:

40	20	10	20	70	60
90	80	30	50	50	70
50	20	50	50	10	40
30	20	60	60		

Faça os seguintes tratamentos de dados solicitados.

A) Determinar a frequência relativa da moda.

B) Esboçar um gráfico com as frequências absolutas de todas as notas.

C) Determinar a mediana dos valores da segunda linha do quadro apresentado.

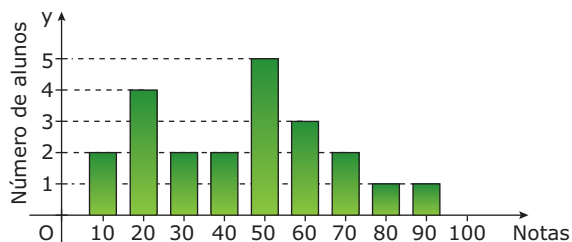
Resolução:

A)

Resultado	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Frequência absoluta	2	4	2	2	5	3	2	1	1

A moda das notas é 50, e a frequência absoluta destas é 5.

Logo, a frequência relativa da moda é $\frac{5}{22}$ = 22,7 %.

B) O gráfico de colunas com as frequências absolutas de todas as notas é:

C) Na segunda linha, temos, em ordem crescente, a seguinte sequência de notas: 30, 50, 50, 70, 80, 90.

Como temos um número par de termos, então a mediana **m** será a média aritmética dos dois valores centrais.

Assim, $m = \frac{50 + 70}{2} \Rightarrow m = 60$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FGV-SP) A tabela a seguir apresenta a distribuição de frequências dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, num certo mês.

Número da classe	Salário do mês em reais	Número de empregados
1	[1 000, 2 000[	20
2	[2 000, 3 000[	18
3	[3 000, 4 000[	9
4	[4 000, 5 000]	3

O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de

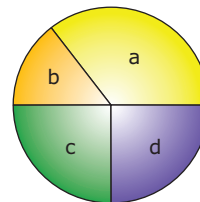
A) R$ 2 637,00.

B) R$ 2 520,00.

C) R$ 2 500,00.

D) R$ 2 420,00.

E) R$ 2 400,00.

02. (UFRGS) Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura a seguir:

Ao setor **a** estão associadas 35% das respostas, ao setor **b**, 270 respostas e, aos setores **c** e **d**, um mesmo número de respostas. Esse número é

A) 45

B) 90

C) 180

D) 450

E) 900

03. (UNIRIO-RJ) Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela a seguir mostra os seis resultados possíveis e as suas respectivas frequências de ocorrências.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frequência	7	9	8	7	9	10

A frequência de aparecimento de um resultado ímpar foi de

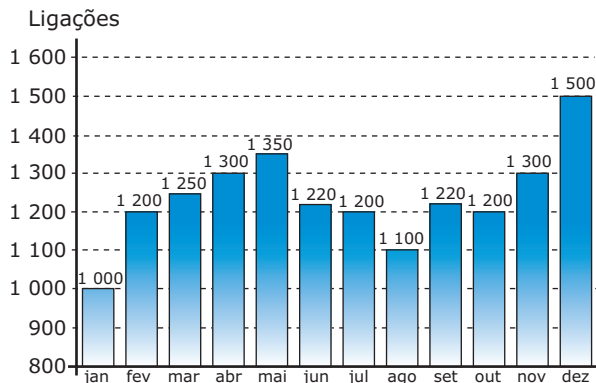
A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{11}{25}$

C) $\frac{12}{25}$

D) $\frac{1}{2}$

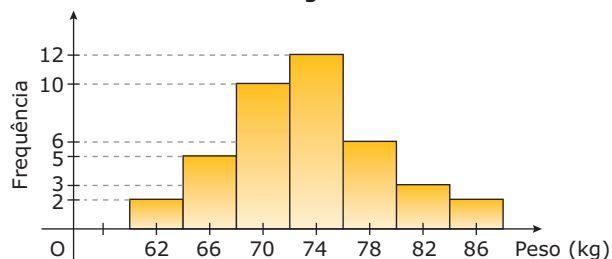
E) $\frac{13}{25}$

04. (UNESP–2007) O número de ligações telefônicas de uma empresa, mês a mês, no ano de 2005, pode ser representado pelo gráfico a seguir:

Com base no gráfico, pode-se afirmar que a quantidade total de meses em que o número de ligações foi maior ou igual a 1 200 e menor ou igual a 1 300 é

A) 2
B) 4
C) 6
D) 7
E) 8

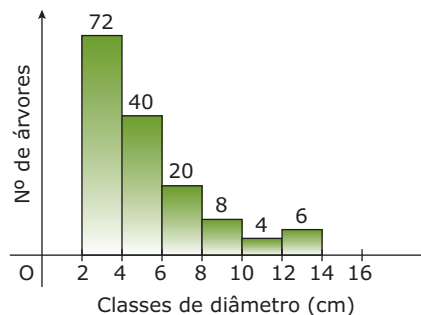
05. (UFU-MG) Uma equipe de futebol realizou um levantamento dos pesos dos seus 40 atletas e chegou à distribuição de frequências dada pela tabela seguinte, cujo histograma correspondente é visto a seguir:

Peso (kg)	Frequência
60 ⊢ 64	2
64 ⊢ 68	5
68 ⊢ 72	10
72 ⊢ 76	12
76 ⊢ 80	6
80 ⊢ 84	3
84 ⊢ 88	2
Total de atletas	40

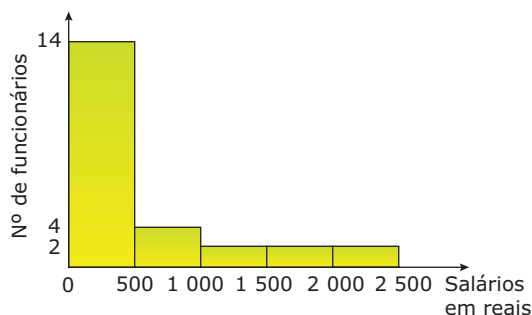
Histograma

Com base nestes dados pode-se afirmar que o valor da mediana dos pesos é igual a

A) 75 B) 72 C) 74 D) 73

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFLA-MG–2006) A idade de uma árvore pode ser avaliada pela medida do diâmetro de seu tronco. A construção de diagramas indicando a distribuição em intervalos de classe para o diâmetro é uma forma de analisar a estrutura etária de uma população de árvores. O gráfico a seguir mostra a distribuição das classes de diâmetro para a espécie arbórea *Xylopia aromatica*.

Considerando esses dados, quantas árvores possuem troncos com diâmetro não inferiores a 8 cm?

A) 8 árvores
B) 140 árvores
C) 4 árvores
D) 18 árvores
E) 10 árvores

02. (PUC-SP) O histograma a seguir apresenta a distribuição de frequências das faixas salariais numa pequena empresa.

Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente,

A) R$ 420,00.
B) R$ 536,00.
C) R$ 562,00.
D) R$ 640,00.
E) R$ 708,00.

03. (UFU-MG) Uma empresa seleciona 16 funcionários fumantes e promove um ciclo de palestras com os mesmos para esclarecimentos sobre os efeitos prejudiciais do cigarro à saúde. Após essas palestras, são coletados dados sobre a quantidade de cigarros que cada um desses fumantes está consumindo diariamente. Tais dados são expressos da seguinte maneira:

10, 1, 10, 11, 13, 10, 34, 13, 13, 12, 12, 11, 13, 11, 12, 12

Os dados 1 e 34 são chamados discrepantes, pois são dados muito menores ou muito maiores que a maioria dos dados obtidos. Segundo essa coleta de dados, pode-se afirmar que

A) os cálculos da média, da mediana e da moda não sofrem influência dos dados discrepantes.

B) o cálculo da mediana sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

C) o cálculo da moda sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

D) o cálculo da média sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

04. (UFU-MG) O Departamento de Comércio Exterior do Banco Central possui 30 funcionários com a seguinte distribuição salarial em reais.

Nº de funcionários	10	12	5	3
Salários em R$	2 000,00	3 600,00	4 000,00	6 000,00

Quantos funcionários que recebem R$ 3 600,00 devem ser demitidos para que a mediana desta distribuição de salários seja de R$ 2 800,00?

A) 8

B) 11

C) 9

D) 10

E) 7

05. (FGV-SP–2007) Quatro amigos calcularam a média e a mediana de suas alturas, tendo encontrado como resultados 1,72 m e 1,70 m, respectivamente. A média entre as alturas do mais alto e do mais baixo, em metros, é igual a

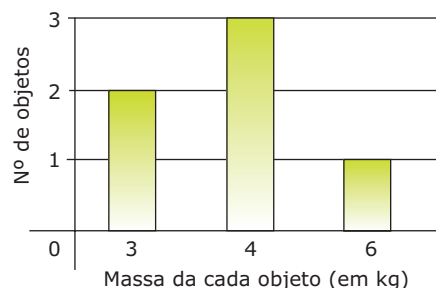
A) 1,70

B) 1,71

C) 1,72

D) 1,73

E) 1,74

06. (FGV-SP–2007) O gráfico a seguir indica as massas de um grupo de objetos.

Acrescentando-se ao grupo **n** objetos de massa 4 kg cada, sabe-se que a média não se altera, mas o desvio padrão reduz-se à metade do que era. Assim, é **CORRETO** afirmar que **n** é igual a

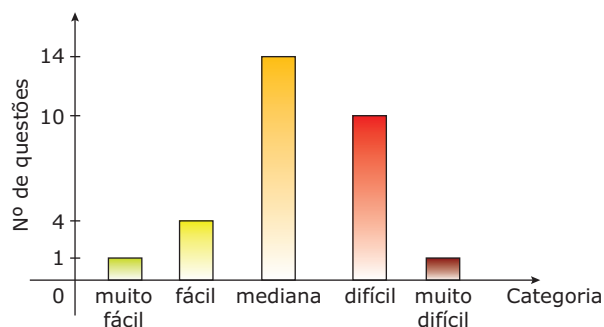
A) 18

B) 15

C) 12

D) 9

E) 8

07. (UFRGS) As questões de Matemática do Concurso Vestibular da UFRGS de 2004 foram classificadas em categorias quanto ao índice de facilidade, como mostra o gráfico de barras a seguir:

Se esta classificação fosse apresentada em um gráfico de setores circulares, a cada categoria corresponderia um setor circular. O ângulo do maior desses setores mediria

A) 80°

B) 120°

C) 157°

D) 168°

E) 172°

MATEMÁTICA

08. (UFPR–2007) Os dados a seguir representam o tempo (em segundos) para carga de um determinado aplicativo, num sistema compartilhado.

Tempo (s)	Frequência
4,5 ⊢ 5,5	03
5,5 ⊢ 6,5	06
6,5 ⊢ 7,5	13
7,5 ⊢ 8,5	05
8,5 ⊢ 9,5	02
9,5 ⊢ 10,5	01
Total	30

Com base nesses dados, considere as afirmativas a seguir:

1. O tempo médio para carga do aplicativo é de 7,0 segundos.
2. A variância da distribuição é aproximadamente 1,33 segundo ao quadrado.
3. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.
4. Cinquenta por cento dos dados observados estão abaixo de 6,5 segundos.

Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

B) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

C) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.

D) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

E) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.

09. (UFU-MG–2006) As 10 medidas colhidas por um cientista num determinado experimento, todas na mesma unidade, foram as seguintes:

1,2; 1,2; 1,4; 1,5; 1,5; 2,0; 2,0; 2,0; 2,0; 2,2

Ao trabalhar na análise estatística dos dados, o cientista esqueceu-se, por descuido, de considerar uma dessas medidas. Dessa forma, comparando os resultados obtidos pelo cientista em sua análise estatística com os resultados corretos para esta amostra, podemos afirmar que

A) a moda e a média foram afetadas.

B) a moda não foi afetada, mas a média foi.

C) a moda foi afetada, mas a média não foi.

D) a moda e a média não foram afetadas.

10. (FGV-SP) Um conjunto de dados numéricos tem variância igual a zero. Podemos concluir que

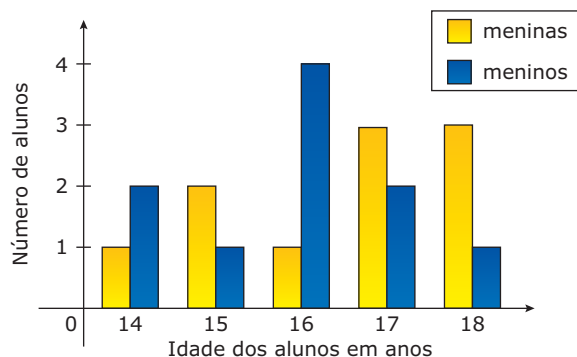
A) a média também vale zero.

B) a mediana também vale zero.

C) a moda também vale zero.

D) o desvio padrão também vale zero.

E) todos os valores desse conjunto são iguais a zero.

11. (UFSCar-SP) Num curso de iniciação à Informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte.

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que

A) o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades.

B) o número total de alunos é 19.

C) a média de idade das meninas é 15 anos.

D) o número de meninos é igual ao número de meninas.

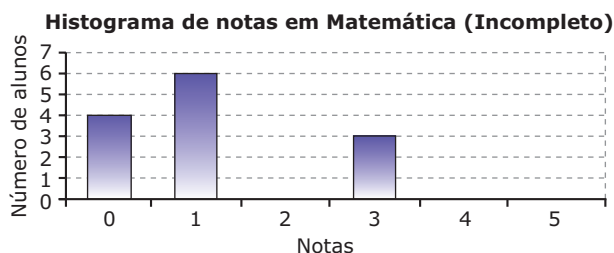
E) o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idades.

12. (FUVEST-SP) A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela a seguir:

Salário (em R$)	Nº de funcionários
500,00	10
1 000,00	5
1 500,00	1
2 000,00	10
5 000,00	4
10 500,00	1
Total	**31**

A) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?

B) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R$ 2 000,00 cada. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

13. (UFJF-MG–2007) Um professor de matemática elaborou, através do computador, um histograma das notas obtidas pela turma em uma prova cujo valor era 5 pontos. Entretanto, o histograma ficou incompleto, pois este professor esqueceu-se de fornecer o número de alunos que obtiveram notas iguais a 2, 4 ou 5. Veja a ilustração a seguir.

i) Total de alunos que fizeram a prova: 40

ii) Média aritmética das notas: 2,6

iii) Mediana das notas: 2,5

A moda dessas notas é

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

14. (UFJF-MG) A editora de uma revista de moda resolveu fazer uma pesquisa sobre a idade de suas leitoras. Para isso selecionou, aleatoriamente, uma amostra de 25 leitoras. As idades que constaram da amostra foram

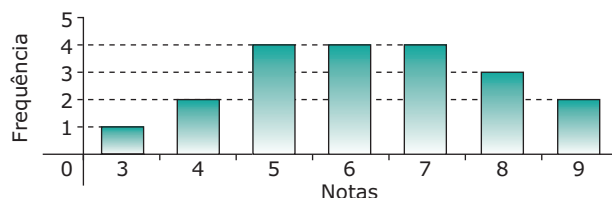
19, 20, 21, 20, 19, 20, 19, 20, 21, 21, 21, 22, 20, 21, 22, 22, 23, 19, 20, 21, 21, 23, 20, 21, 19.

Considerando as informações dadas, faça o que se pede.

A) **COMPLETE** a tabela de frequências absoluta (**f**) e relativa (fr) a partir dos dados anteriores.

Idade	f	fr(%)
Total		

B) Foi escrita uma reportagem dirigida a leitoras de 21 anos. Considerando que a pesquisa admite uma margem de erro de 2%, para mais e para menos, quantas leitoras dessa idade leram a matéria, sabendo-se que foram vendidas 3 500 revistas?

15. (UFJF-MG–2009) Um professor fez o levantamento das notas de uma turma composta de 20 alunos. As notas foram obtidas em uma prova cujo valor era 10 pontos. Veja o gráfico a seguir:

Depois de confeccionado esse gráfico, o professor percebeu ter errado a nota de um dos alunos e verificou que, feita a correção, a média das notas dessa turma aumentaria em 0,2 ponto e a moda passaria a ser 7 pontos. A nota que estava **ERRADA** era

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

16. (Unimontes-MG–2008) Qual a média aritmética (Ma), a moda (Mo) e a mediana (Me), respectivamente, dos dados da tabela de frequências a seguir?

Idade dos alunos da 7ª A – Escola Gama – 2007

Idade	Frequência
13	3
14	2
15	4
16	1
Total	10

Fonte: SECRETARIA DA ESCOLA GAMA.

A) 14,5; 15; 14,3
B) 14,5; 15; 14,5
C) 14,3; 14,5; 15
D) 14,3; 15; 14,5

17. (FGV-SP–2008) Sejam os números 7, 8, 3, 5, 9 e 5 seis números de uma lista de nove números inteiros. O maior valor **POSSÍVEL** para a mediana dos nove números da lista é

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

A) R$ 73,10.

B) R$ 81,50.

C) R$ 82,00.

D) R$ 83,00.

E) R$ 85,30.

02. (Enem–2009) Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

A) teria a pontuação igual a 6,5, se ele obtivesse nota 0.

B) seria a vencedora, se ele obtivesse nota 10.

C) seria a segunda colocada, se ele obtivesse nota 8.

D) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.

E) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação, se o aluno obtivesse nota 9.

03. (Enem–2009) A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – p.p.m.)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II. Matemática TP3.
Disponível em: <www.mec.gov.br>. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em p.p.m.) e a produção (em toneladas) é

A) inferior a 0,18.

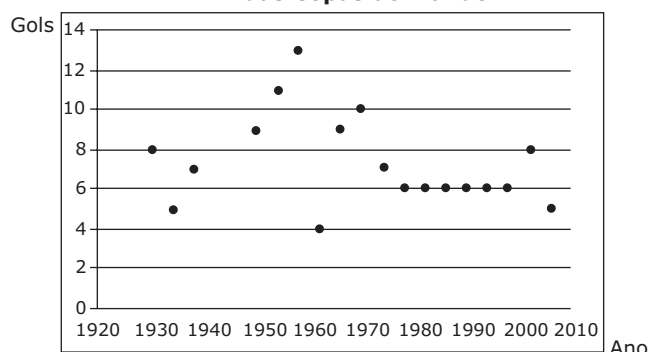
B) superior a 0,18 e inferior a 0,50.

C) superior a 0,50 e inferior a 1,50.

D) superior a 1,50 e inferior a 2,80.

E) superior a 2,80.

04. (Enem–2010) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidades de gols dos artilheiros das Copas do Mundo

Disponível em: <http://www.suapesquisa.com>.
Acesso em: 23 abr. 2010 (Adaptação).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

A) 6 gols

B) 6,5 gols

C) 7 gols

D) 7,3 gols

E) 8,5 gols

05. (Enem–2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

D) Paulo, pois obteve maior mediana.

E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

06. (Enem–2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se **X**, **Y** e **Z** são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

A) $X = Y < Z$

B) $Z < X = Y$

C) $Y < Z < X$

D) $Z < X < Y$

E) $Z < Y < X$

07. (Enem–2010) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

A) I

B) II

C) III

D) IV

E) V

08. (Enem–2009) Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente,

A) 3, 2 e 1

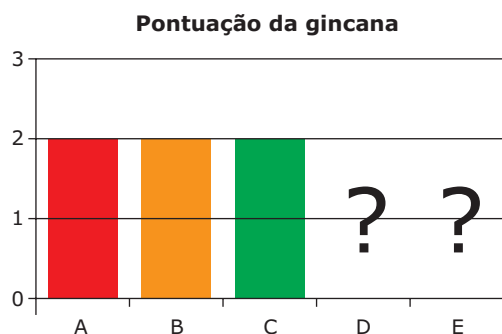
B) 3, 3 e 1

C) 3, 4 e 2

D) 5, 4 e 2

E) 6, 2 e 4

MATEMÁTICA

09. (Enem–2009) Cinco equipes **A**, **B**, **C**, **D** e **E** disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos. As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir; entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe **D** e da equipe **E**.

Mesmo sem aparecer as notas das equipes **D** e **E**, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente,

A) 1,5 e 2,0

B) 2,0 e 1,5

C) 2,0 e 2,0

D) 2,0 e 3,0

E) 3,0 e 2,0

GABARITO

Fixação

01 E

02. D

03. C

04. E

05. D

Propostos

01. D

02. E

03. D

04. D

05. E

06. A

07. D

08. D

09. B

10. D

11. D

12. A) Média: R$ 2 000,00

Mediana: R$ 1 500,00

B) A variância ficará menor.

13. D

14. A)

Idade	f	fr(%)
19	5	20
20	7	28
21	8	32
22	3	12
23	2	8
Total	**25**	**100**

B) Entre 1 050 e 1 190 leitoras com 21 anos leram a matéria.

15. A

16. D

17. D

Seção Enem

01. D

02. D

03. D

04. B

05. B

06. E

07. C

08. B

09. C